10 класс — **И вновь готовимся к региону** — 29 января 2015

1. Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них – 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок – целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

2. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася – любую из двух оставшихся, а затем Петя – оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

3. Стозначное число n назовём *необычным*, если десятичная запись числа n^3 заканчивается на n, а десятичная запись числа n^2 не заканчивается на n. Докажите, что существует не менее двух стозначных необычных чисел.

4. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

5. На некоторых клетках шахматной доски стоит по фишке. Ходом фишки называется перестановка её через фишку, стоящую на соседней (по вертикали, горизонтали или диагонали) клетке, непосредственно за которой на той же линии имеется свободная клетка. Какое наибольшее количество фишек может насчитывать такое их расположение на доске, в котором любая фишка сможет сделать первый ход?

6. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

7. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC – точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен $60°$. Докажите, что $A_1A_2/BC = B_1B_2/CA = C_1C_2/AB$.

8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку – не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

10 класс	И вновь готовимся к региону	29 января 2015

1. Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них – 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок – целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

2. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася – любую из двух оставшихся, а затем Петя – оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

3. Стозначное число n назовём *необычным*, если десятичная запись числа n^3 заканчивается на n, а десятичная запись числа n^2 не заканчивается на n. Докажите, что существует не менее двух стозначных необычных чисел.

4. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

5. На некоторых клетках шахматной доски стоит по фишке. Ходом фишки называется перестановка её через фишку, стоящую на соседней (по вертикали, горизонтали или диагонали) клетке, непосредственно за которой на той же линии имеется свободная клетка. Какое наибольшее количество фишек может насчитывать такое их расположение на доске, в котором любая фишка сможет сделать первый ход?

6. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

7. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC – точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен $60°$. Докажите, что $A_1A_2/BC = B_1B_2/CA = C_1C_2/AB$.

8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку – не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.