

1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырёх из оставшихся.

2. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася – значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными?

3. Дан выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$ . Известно, что  $\angle FAE = \angle BDC$ , а четырёхугольники  $ABDF$  и  $ACDE$  являются вписанными. Докажите, что прямые  $BF$  и  $CE$  параллельны.

4. Петя выбрал натуральное число  $a > 1$  и выписал на доску пятнадцать чисел  $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^3, \dots, 1 + a^{15}$ . Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

5. Последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots$  задана условиями  $a_1 = 1, a_2 = 143$  и  $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  при всех  $n \geq 2$ . Докажите, что все члены последовательности – целые числа.

6. Дан квадрат  $n \times n$ . Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате  $2 \times 2$  одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную – в зелёный, а каждую зелёную – в белый. При каких  $n$  за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

7. На окружности отмечено  $2N$  точек ( $N$  – натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из  $N$  хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

8. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  – точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника  $OCD$  взята точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .

1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырёх из оставшихся.

2. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася – значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными?

3. Дан выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$ . Известно, что  $\angle FAE = \angle BDC$ , а четырёхугольники  $ABDF$  и  $ACDE$  являются вписанными. Докажите, что прямые  $BF$  и  $CE$  параллельны.

4. Петя выбрал натуральное число  $a > 1$  и выписал на доску пятнадцать чисел  $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^3, \dots, 1 + a^{15}$ . Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

5. Последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots$  задана условиями  $a_1 = 1, a_2 = 143$  и  $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  при всех  $n \geq 2$ . Докажите, что все члены последовательности – целые числа.

6. Дан квадрат  $n \times n$ . Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате  $2 \times 2$  одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную – в зелёный, а каждую зелёную – в белый. При каких  $n$  за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

7. На окружности отмечено  $2N$  точек ( $N$  – натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовём *паросочетанием* такой набор из  $N$  хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

8. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  – точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника  $OCD$  взята точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .