10 класс | Письменные задачи | 12 января 2015

1. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть S_1 и S_2 – соответственно окружности, описанные около треугольников ABO и CDO, O и K – точки пересечения окружностей S_1 и S_2. Прямые, проходящие через точку O параллельно прямым AB и CD, вторично пересекают S_1 и S_2 в точках L и M соответственно. На отрезках OL и OM выбраны соответственно точки P и Q так, что $OP : PL = MQ : QO$. Докажите, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.

3. Дано дерево с n вершинами, $n \geqslant 2$. В его вершинах расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех рёбрах. Докажите, что $\sqrt{n-1}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant 2S$.

4. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любое подмножество X' множества X, состоящее из не более 9 точек, можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T. Докажите, что всё множество X можно покрыть двумя параллельными переносами T.

10 класс | Письменные задачи | 12 января 2015

1. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть S_1 и S_2 – соответственно окружности, описанные около треугольников ABO и CDO, O и K – точки пересечения окружностей S_1 и S_2. Прямые, проходящие через точку O параллельно прямым AB и CD, вторично пересекают S_1 и S_2 в точках L и M соответственно. На отрезках OL и OM выбраны соответственно точки P и Q так, что $OP : PL = MQ : QO$. Докажите, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.

3. Дано дерево с n вершинами, $n \geqslant 2$. В его вершинах расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех рёбрах. Докажите, что $\sqrt{n-1}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant 2S$.

4. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любое подмножество X' множества X, состоящее из не более 9 точек, можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T. Докажите, что всё множество X можно покрыть двумя параллельными переносами T.

10 класс | Письменные задачи | 12 января 2015

1. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть S_1 и S_2 – соответственно окружности, описанные около треугольников ABO и CDO, O и K – точки пересечения окружностей S_1 и S_2. Прямые, проходящие через точку O параллельно прямым AB и CD, вторично пересекают S_1 и S_2 в точках L и M соответственно. На отрезках OL и OM выбраны соответственно точки P и Q так, что $OP : PL = MQ : QO$. Докажите, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.

3. Дано дерево с n вершинами, $n \geqslant 2$. В его вершинах расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех рёбрах. Докажите, что $\sqrt{n-1}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant 2S$.

4. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любое подмножество X' множества X, состоящее из не более 9 точек, можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T. Докажите, что всё множество X можно покрыть двумя параллельными переносами T.