Квадратичный закон взаимности Гаусса. 24 ноября 2014

Напоминание. Для любых различных нечётных простых чисел p и q верно

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

4. а) Пусть $(m,n)=1$. Докажите, что число a является квадратичным вычетом по модулю mn тогда и только тогда, когда оно является квадратичным вычетом по модулям m и n.

б) Пусть p — нечётное простое число, $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю p^n тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю p.

в) Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю 2^n (где $n>3$) тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю 8.

5. Докажите, что если число 2^n+1 — простое ($n>1$), то 3 является его первообразным корнем.

6. Последовательность $\{x_n\}$ определена рекурсивно: $x_1=a$ при некотором натуральном a, а также $x_{n+1}=2x_n+1$. Пусть $y_n=2^{x_n}-1$. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности $\{y_n\}$?

7. Докажите, что простых чисел вида $10k-1$ бесконечно много.

Графы и не только. 27 ноября 2014

2. Каждая сторона правильного треугольника разделена на 30 равных частей. Прямые, проведенные через отрезки деления параллельно сторонам треугольника, разбивают его на 900 маленьких треугольничков. Каково максимальное число вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведенной прямой или стороне?

3. Таблица 5×5 заполнена нулями и единицами. Известно, что в левом верхнем и правом нижнем углах стоят единицы, а в двух других углах стоят нули. Докажите, что в таблице можно выбрать два разных квадрата 2×2 с одинаковой расстановкой чисел.

4. В Швамбрании закрыли одну авиалинию. Известно, что после этого из любого аэропорта до любого другого можно долететь, быть может, с пересадками. До закрытия линии это можно было сделать, совершив не более, чем n пересадок. Докажите, что теперь из любого аэропорта в любой другой можно долететь не более, чем с $2n$ пересадками.

5. В королевстве есть три типа дорог, соединяющих города: шоссе, проселок и железная дорога. Из каждого города выходит ровно одна дорога каждого из трех типов. Известно, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно посетить все города, не проезжая ни по какой дороге в разных направлениях.

6. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток, не выходящих за ее пределы в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащим уголкам?

7. *Мостом* в графе называется ребро, при выкидывании которого количество компонент связности увеличивается. Докажите, что связный граф можно ориентировать так, чтобы он не потерял связности, тогда и только тогда, когда в нем нет мостов.

8. В стране n городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами, причем любые два города соединены не более чем одной дорогой. Пусть $2\leqslant k\leqslant n$ – некоторое натуральное число. Докажите, что в стране существует k городов, степени которых отличаются друг от друга не менее, чем на $k-1$.

9. В графе степени всех вершин не превосходят 11. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в 221 цвет таким образом, чтобы концы ребер каждого цвета не совпадали и были не смежны.

10. Назовём компанию k-неразбиваемой, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.

Полувписанная окружность. 1 декабря 2014

Напоминание. Дан треугольник ABC. Рассмотрим окружность ω_A, которая касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1, а описанной окружности треугольника ABC в точке P_A. Назовем ее *полувписанной*. Пусть A', B' и C' — середины дуг BC, AC и AB.

4. Докажите, что четырехугольник P_AIC_1B вписанный, причем его описанная окружность касается прямой CC'.

5. Докажите, что точка I является серединой отрезка B_1C_1.

6. Докажите, что прямые B_1C_1, BC и P_AA' пересекаются в одной точке Y_A.

7. Определим точки Y_B и Y_C аналогично. Докажите, что Y_A, Y_B, Y_C лежат на одной прямой.

8. Определим точки P_B и P_C аналогично. Докажите, что AP_A, BP_B и CP_C пересекаются в одной точке.

9. В треугольнике ABC точки A_1 и B_1 — основания высот из вершин A и B соответственно, P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и A_1B_1C, K — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках A и B, M и N — их точки пересечения с прямой A_1B_1. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и KMN касаются в точке P.

Асимптотика. 4 декабря 2014

5. Из клетчатой плоскости вырезали все клетки, у которых обе координаты делятся на 100. Докажите, что оставшееся поле нельзя обойти шахматным конём.

6. Докажите, что равными выпуклыми 7-угольниками невозможно покрыть плоскость без наложений.

7. Существует ли квадратный трёхчлен, который во всех натуральных точках принимает степени натуральных чисел не ниже третьей?

8. На плоскости дана клякса – замкнутая ограниченная фигура. Каждую секунду к кляксе добавляется точка, если клякса содержит хотя бы половину площади единичного круга с центром в этой точке, и удаляется, если клякса содержит меньше половины площади единичного круга. Может ли через некоторое время площадь кляксы вырасти более чем в тысячу раз по сравнению с первоначальной площадью?

Разнобой. 8 декабря 2014

1. Существуют ли 5 различных натуральных чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, но произведение любых трёх из них – квадрат целого числа?

2. В ряд выложены 100 монет: орёл, решка, орёл, решка, … . За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

3. Неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ не превосходят 1. Найдите наибольшее значение выражения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014} - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{2014}x_1\ .$$

4. Андрей и Алексей играют в игру. У них есть бесконечная клетчатая полоска ширины 1, на которой отмечены 2 клетки на расстоянии n клеток между ними. Назовём их *ловушками.* Андрей ставит в любую клетку между ловушками фишку. На каждом ходу Алексей называет произвольное число m, а Андрей двигает фишку на m клеток вправо или влево. Если за конечное число ходов фишка попадёт в ловушку, то Андрей будет должен Алексею подарить билет на концерт Вити АК-47. При каких n Алексей может гарантировать себе вечер духовной музыки?

5. а) Три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

б) А если богатырей тридцать три?

6. На доске 8×8 стоит 50 фишек. Разрешается выбрать квадрат 2×2, в котором стоит единственная фишка, и снять её. Докажите, что невозможно снять все фишки.

7. а) В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Докажите, что $OH = AB + AC$, где O и H – центр описанной окружности и ортоцентр соответственно.

б) В треугольнике выбрана точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC$. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ATB, BTC и ATC пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что точка пересечения из предыдущей задачи лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

8. Отрезок длины 1 покрыт несколькими лежащими на нём отрезками. Докажите, что сумма длин некоторых попарно непересекающихся отрезков не меньше 0,5.