Разнобой

1. Существуют ли 5 различных натуральных чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, но произведение любых трёх из них – квадрат целого числа?

2. В ряд выложены 100 монет: орёл, решка, орёл, решка, $\ldots$. За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

3. Неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ не превосходят 1. Найдите наибольшее значение выражения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014} - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{2014}x_1 \ .$$

4. Андрей и Алексей играют в игру. У них есть бесконечная клетчатая полоска ширины 1, на которой отмечены 2 клетки на расстоянии n клеток между ними. Назовём их *ловушками*. Андрей ставит в любую клетку между ловушками фишку. На каждом ходу Алексей называет произвольное число m, а Андрей двигает фишку на m клеток вправо или влево. Если за конечное число ходов фишка попадёт в ловушку, то Андрей будет должен Алексею подарить билет на концерт Вити АК-47. При каких n Алексей может гарантировать себе вечер духовной музыки?

5. а) Три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

б) А если богатырей тридцать три?

6. На доске 8×8 стоит 50 фишек. Разрешается выбрать квадрат 2×2, в котором стоит единственная фишка, и снять её. Докажите, что невозможно снять все фишки.

7. а) В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Докажите, что $OH = AB + AC$, где O и H – центр описанной окружности и ортоцентр соответственно.

б) В треугольнике выбрана точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC$. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ATB, BTC и ATC пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что точка пересечения из предыдущей задачи лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

8. Отрезок длины 1 покрыт несколькими лежащими на нём отрезками. Докажите, что сумма длин некоторых попарно непересекающихся отрезков не меньше 0,5.

10 класс — Разнобой — 8 декабря 2014

1. Существуют ли 5 различных натуральных чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, но произведение любых трёх из них – квадрат целого числа?

2. В ряд выложены 100 монет: орёл, решка, орёл, решка, … . За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?

3. Неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ не превосходят 1. Найдите наибольшее значение выражения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014} - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{2014}x_1 \ .$$

4. Андрей и Алексей играют в игру. У них есть бесконечная клетчатая полоска ширины 1, на которой отмечены 2 клетки на расстоянии n клеток между ними. Назовём их *ловушками*. Андрей ставит в любую клетку между ловушками фишку. На каждом ходу Алексей называет произвольное число m, а Андрей двигает фишку на m клеток вправо или влево. Если за конечное число ходов фишка попадёт в ловушку, то Андрей будет должен Алексею подарить билет на концерт Вити АК-47. При каких n Алексей может гарантировать себе вечер духовной музыки?

5. а) Три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

б) А если богатырей тридцать три?

6. На доске 8×8 стоит 50 фишек. Разрешается выбрать квадрат 2×2, в котором стоит единственная фишка, и снять её. Докажите, что невозможно снять все фишки.

7. а) В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Докажите, что $OH = AB + AC$, где O и H – центр описанной окружности и ортоцентр соответственно.

б) В треугольнике выбрана точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC$. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ATB, BTC и ATC пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что точка пересечения из предыдущей задачи лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

8. Отрезок длины 1 покрыт несколькими лежащими на нём отрезками. Докажите, что сумма длин некоторых попарно непересекающихся отрезков не меньше 0,5.