10 класс	Письменные задачи	8 декабря 2014

1. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2+Q^2=R^2$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени – действительные.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω. Касательная к ω, проведенная через A, пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K, а касательная к ω, проведённая через B, пересекает продолжение стороны AD за точку A в точке M. Известно, что $AM=AD$ и $BK=BC$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

3. Докажите, что для любого натурального числа $n>10000$ найдётся такое натуральное число m, представимое в виде суммы двух квадратов, что $0<m-n<3\sqrt[4]{n}$.

4. В некотором государстве было 2002 города, соединённых дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по её городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002.

10 класс	Письменные задачи	8 декабря 2014

1. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2+Q^2=R^2$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени – действительные.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω. Касательная к ω, проведенная через A, пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K, а касательная к ω, проведённая через B, пересекает продолжение стороны AD за точку A в точке M. Известно, что $AM=AD$ и $BK=BC$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

3. Докажите, что для любого натурального числа $n>10000$ найдётся такое натуральное число m, представимое в виде суммы двух квадратов, что $0<m-n<3\sqrt[4]{n}$.

4. В некотором государстве было 2002 города, соединённых дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по её городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002.