10 класс

Графы и не только

27 ноября 2014

1. Вася и Петя играют в следующую игру: в куче лежит 1992 камня, за каждый ход можно взять произвольное количество камней, являющееся делителем того числа камней, которое взял предыдущим ходом соперник. Первым ходом Петя может взять любое количество камней, отличное от 1992 и 0. Выигрывает тот, кто берет последний камень. Кто побеждает при правильной игре?

2. Каждая сторона правильного треугольника разделена на 30 равных частей. Прямые, проведенные через отрезки деления параллельно сторонам треугольника, разбивают его на 900 маленьких треугольничков. Каково максимальное число вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведенной прямой или стороне?

3. Таблица 5×5 заполнена нулями и единицами. Известно, что в левом верхнем и правом нижнем углах стоят единицы, а в двух других углах стоят нули. Докажите, что в таблице можно выбрать два разных квадрата 2×2 с одинаковой расстановкой чисел.

4. В Швамбрании закрыли одну авиалинию. Известно, что после этого из любого аэропорта до любого другого можно долететь, быть может, с пересадками. До закрытия линии это можно было сделать, совершив не более, чем n пересадок. Докажите, что теперь из любого аэропорта в любой другой можно долететь не более, чем с $2n$ пересадками.

5. В королевстве есть три типа дорог, соединяющих города: шоссе, проселок и железная дорога. Из каждого города выходит ровно одна дорога каждого из трех типов. Известно, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно посетить все города, не проезжая ни по какой дороге в разных направлениях.

6. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток, не выходящих за ее пределы в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащим уголкам?

7. *Мостом* в графе называется ребро, при выкидывании которого количество компонент связности увеличивается. Докажите, что связный граф можно ориентировать так, чтобы он не потерял связности, тогда и только тогда, когда в нем нет мостов.

8. В стране n городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами, причем любые два города соединены не более чем одной дорогой. Пусть $2 \leqslant k \leqslant n$ – некоторое натуральное число. Докажите, что в стране существует k городов, степени которых отличаются друг от друга не менее, чем на $k-1$.

9. В графе степени всех вершин не превосходят 11. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в 221 цвет таким образом, чтобы концы ребер каждого цвета не совпадали и были не смежны.

10. Назовём компанию k-неразбиваемой, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.

1. Вася и Петя играют в следующую игру: в куче лежит 1992 камня, за каждый ход можно взять произвольное количество камней, являющееся делителем того числа камней, которое взял предыдущим ходом соперник. Первым ходом Петя может взять любое количество камней, отличное от 1992 и 0. Выигрывает тот, кто берет последний камень. Кто побеждает при правильной игре?

2. Каждая сторона правильного треугольника разделена на 30 равных частей. Прямые, проведенные через отрезки деления параллельно сторонам треугольника, разбивают его на 900 маленьких треугольничков. Каково максимальное число вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведенной прямой или стороне?

3. Таблица 5×5 заполнена нулями и единицами. Известно, что в левом верхнем и правом нижнем углах стоят единицы, а в двух других углах стоят нули. Докажите, что в таблице можно выбрать два разных квадрата 2×2 с одинаковой расстановкой чисел.

4. В Швамбрании закрыли одну авиалинию. Известно, что после этого из любого аэропорта до любого другого можно долететь, быть может, с пересадками. До закрытия линии это можно было сделать, совершив не более, чем n пересадок. Докажите, что теперь из любого аэропорта в любой другой можно долететь не более, чем с $2n$ пересадками.

5. В королевстве есть три типа дорог, соединяющих города: шоссе, проселок и железная дорога. Из каждого города выходит ровно одна дорога каждого из трех типов. Известно, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно посетить все города, не проезжая ни по какой дороге в разных направлениях.

6. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток, не выходящих за ее пределы в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащим уголкам?

7. *Мостом* в графе называется ребро, при выкидывании которого количество компонент связности увеличивается. Докажите, что связный граф можно ориентировать так, чтобы он не потерял связности, тогда и только тогда, когда в нем нет мостов.

8. В стране n городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами, причем любые два города соединены не более чем одной дорогой. Пусть $2 \leqslant k \leqslant n$ – некоторое натуральное число. Докажите, что в стране существует k городов, степени которых отличаются друг от друга не менее, чем на $k - 1$.

9. В графе степени всех вершин не превосходят 11. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в 221 цвет таким образом, чтобы концы ребер каждого цвета не совпадали и были не смежны.

10. Назовём компанию k-неразбиваемой, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.