10 класс | Письменные задачи | 24 ноября 2014

1. Даны целые числа a, b и c, $c \neq b$. Известно, что общий корень имеют квадратные трёхчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$. Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.

2. На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком).

3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведённая в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M – середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.

10 класс | Письменные задачи | 24 ноября 2014

1. Даны целые числа a, b и c, $c \neq b$. Известно, что общий корень имеют квадратные трёхчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$. Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.

2. На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком).

3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведённая в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M – середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.

10 класс | Письменные задачи | 24 ноября 2014

1. Даны целые числа a, b и c, $c \neq b$. Известно, что общий корень имеют квадратные трёхчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$. Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.

2. На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком).

3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведённая в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M – середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.