Двойные отношения

Напоминание 1. *Двойным отношением точек* A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется число

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

Определение. *Двойным отношением прямых* a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется число

$$(abcd) = \frac{sin\angle ac}{sin\angle bc} : \frac{sin\angle ad}{\sin\angle bd}$$

Напоминание 2. Если прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке, точки A, B, C, D лежат на прямых соответственно названиям, а также на одной прямой, то $(abcd) = (ABCD)$.

Напоминание 3. Двойное отношение точек сохраняется при центральной проекции.

Определение. Четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*, если $(ABCD) = -1$.

1. Докажите, что

a) $(ABCD) = (BADC)$;

b) $(ABCD) + (ACBD) = 1$;

c) $(ABCD) \cdot (BACD) = 1$;

d) Пусть $(ABCD) = \alpha$. Чему может быть равно $(A'B'C'D')$, где $A'B'C'D'$ — любая перестановка точек $ABCD$?

2. O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, P и Q — точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны. Прямые PO и QO пересекают стороны AB, CD, AD, BC в точках K, L, M, N. Сколько гармонических четверок точек можно найти на рисунке?

3. В четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями O — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения лучей AD и BC, BA и CD соответственно. Докажите, что $\angle POB = \angle QOB$.

4. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q — точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

5. a) В треугольнике ABC биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $(BCXY) = -1$.

b) H — основание высоты из вершины A треугольника ABC, A_1 — основание биссектрисы из вершины A, I и I_A — центры вписанной и вневписанной окружности, касающейся стороны BC, соответственно. Докажите, что $\angle IHA_1 = \angle I_AHA_1$.

6. Задача о бабочке. Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O, P и Q — точки пересечения AC и BD с MN. Докажите, что O — середина отрезка PQ.

7. Из точки A к окружности проведены касательные AP и AQ. Через точку A проведена произвольная прямая, пересекающая окружность в точках B и C, а хорду PQ в точке D. Докажите, что $(BCAD) = -1$.

8. Дан прямой угол и произвольный угол, имеющий с ним общую вершину и сторону. Удвойте последний угол с помощью одной линейки.

Напоминание 1. *Двойным отношением точек* A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется число

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

Определение. *Двойным отношением прямых* a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется число

$$(abcd) = \frac{sin\angle ac}{sin\angle bc} : \frac{sin\angle ad}{\sin\angle bd}$$

Напоминание 2. Если прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке, точки A, B, C, D лежат на прямых соответственно названиям, а также на одной прямой, то $(abcd) = (ABCD)$.

Напоминание 3. Двойное отношение точек сохраняется при центральной проекции.

Определение. Четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*, если $(ABCD) = -1$.

1. Докажите, что
a) $(ABCD) = (BADC)$;
b) $(ABCD) + (ACBD) = 1$;
c) $(ABCD) \cdot (BACD) = 1$;
d) Пусть $(ABCD) = \alpha$. Чему может быть равно $(A'B'C'D')$, где $A'B'C'D'$ — любая перестановка точек $ABCD$?

2. O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, P и Q — точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны. Прямые PO и QO пересекают стороны AB, CD, AD, BC в точках K, L, M, N. Сколько гармонических четверок точек можно найти на рисунке?

3. В четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями O — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения лучей AD и BC, BA и CD соответственно. Докажите, что $\angle POB = \angle QOB$.

4. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q — точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

5. a) В треугольнике ABC биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $(BCXY) = -1$.
b) H — основание высоты из вершины A треугольника ABC, A_1 — основание биссектрисы из вершины A, I и I_A — центры вписанной и вневписанной окружности, касающейся стороны BC, соответственно. Докажите, что $\angle IHA_1 = \angle I_AHA_1$.

6. Задача о бабочке. Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O, P и Q — точки пересечения AC и BD с MN. Докажите, что O — середина отрезка PQ.

7. Из точки A к окружности проведены касательные AP и AQ. Через точку A проведена произвольная прямая, пересекающая окружность в точках B и C, а хорду PQ в точке D. Докажите, что $(BCAD) = -1$.

8. Дан прямой угол и произвольный угол, имеющий с ним общую вершину и сторону. Удвойте последний угол с помощью одной линейки.