

1. В клетках таблицы $m \times n$ расставлены различные числа. В каждой строчке наибольшее число отмечено красным цветом, а в каждом столбце наибольшее число отмечено синим цветом. Докажите, что обязательно найдётся число, отмеченное как красным, так и синим цветами.
2. В таблице 10×10 расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменять знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, что такими операциями можно получить таблицу, у которой суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательны.
3. На доске 101×101 расставлена 101 ладья, ни одна из которых не бьёт другую. Затем каждая ладья сходила ходом коня. Обязательно ли после этого какие-то две ладьи будут бить друг друга?
4. Все клетки квадрата 5×5 покрашены в синий и красный цвета так, что среди раскрасок квадратов 2×2 встречаются все возможные раскраски. Найдите наименьшее возможное количество красных клеток.
5. Клетки доски 2014×2014 покрашены в 3 цвета, причём есть клетки всех цветов. Оказалось, что любые четыре клетки, вершины которых образуют прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки, покрашены не более чем в два различных цвета. Докажите, что либо все клетки каждой строки покрашены в один и тот же цвет, либо все клетки каждого столбца покрашены в один и тот же цвет.
6. Дан клетчатый квадрат 20×20 . k его клеток окрашены в чёрный цвет, а остальные – в белый. Если в какой-то момент три из четырёх клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, окрашены в чёрный цвет, то через минуту и четвёртая клетка тоже перекрашивается в чёрный. При каком наименьшем k может так оказаться, что через некоторое время весь квадрат станет чёрным?
7. Есть набор из N^2 карточек, на каждой карточке с одной стороны написано число, с другой стороны пусто. Все написанные числа попарно различны. Эти карточки выложены на доску $N \times N$ пустой стороной вверх (в каждой клетке – одна карточка). Разрешается перевернуть любую карточку и тем самым узнать написанное на ней число. Докажите, что не более чем за $8N$ переворачиваний можно найти карточку, число на которой меньше, чем число на каждой из соседних по стороне карточек.
8. В таблице $3n \times 3n$ стоят вычеты по модулю 3. Известно, что разность любых двух столбцов – столбец с n нулями, n единицами и n двойками. Докажите, что разность любых двух строк – строка с n нулями, n единицами и n двойками.

1. В клетках таблицы $m \times n$ расставлены различные числа. В каждой строчке наибольшее число отмечено красным цветом, а в каждом столбце наибольшее число отмечено синим цветом. Докажите, что обязательно найдётся число, отмеченное как красным, так и синим цветами.
2. В таблице 10×10 расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменять знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, что такими операциями можно получить таблицу, у которой суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательны.
3. На доске 101×101 расставлена 101 ладья, ни одна из которых не бьёт другую. Затем каждая ладья сходила ходом коня. Обязательно ли после этого какие-то две ладьи будут бить друг друга?
4. Все клетки квадрата 5×5 покрашены в синий и красный цвета так, что среди раскрасок квадратов 2×2 встречаются все возможные раскраски. Найдите наименьшее возможное количество красных клеток.
5. Клетки доски 2014×2014 покрашены в 3 цвета, причём есть клетки всех цветов. Оказалось, что любые четыре клетки, вершины которых образуют прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки, покрашены не более чем в два различных цвета. Докажите, что либо все клетки каждой строки покрашены в один и тот же цвет, либо все клетки каждого столбца покрашены в один и тот же цвет.
6. Дан клетчатый квадрат 20×20 . k его клеток окрашены в чёрный цвет, а остальные – в белый. Если в какой-то момент три из четырёх клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, окрашены в чёрный цвет, то через минуту и четвёртая клетка тоже перекрашивается в чёрный. При каком наименьшем k может так оказаться, что через некоторое время весь квадрат станет чёрным?
7. Есть набор из N^2 карточек, на каждой карточке с одной стороны написано число, с другой стороны пусто. Все написанные числа попарно различны. Эти карточки выложены на доску $N \times N$ пустой стороной вверх (в каждой клетке – одна карточка). Разрешается перевернуть любую карточку и тем самым узнать написанное на ней число. Докажите, что не более чем за $8N$ переворачиваний можно найти карточку, число на которой меньше, чем число на каждой из соседних по стороне карточек.
8. В таблице $3n \times 3n$ стоят вычеты по модулю 3. Известно, что разность любых двух столбцов – столбец с n нулями, n единицами и n двойками. Докажите, что разность любых двух строк – строка с n нулями, n единицами и n двойками.