

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD , O — точка пересечения его диагоналей. Окружность с центром в точке O касается стороны BC . Докажите, что касательные к этой окружности, проведённые из точек B и C , пересекаются на AD .
2. В треугольнике ABC A_1 и B_1 — середины высот, опущенных из вершин A и B , M и H — середина AB и основание высоты из вершины C соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, M, H лежат на одной окружности.
3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что прямые DP и KL перпендикулярны.
4. В угол вписаны две окружности, одна из которых касается сторон угла в точках A и B , а другая — в точках C и D . Докажите, что окружности высекают на прямой AD равные хорды.
5. а) Вписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , невписанная — в точке N ; MP — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, P, N лежат на одной прямой.
б) Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания невписанных окружностей со сторонами BC, AC, AB соответственно, N — точка пересечения AA_1 и BB_1 , M — ближайшая к C точка пересечения вписанной окружности и CC_1 . Докажите, что $CM = NC_1$.
6. На сторонах AB и AC треугольника ABC вовне построены квадраты $ABKL$ и $ACMN$. Докажите, что прямая, проходящая через A перпендикулярно LN , делит BC пополам.
7. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° . Из вершины B внутрь треугольника выпустили 2 луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись относительно основания AC в точках P и Q , попали в точки K и M на сторонах AB и BC соответственно. Докажите, что

$$S_{BPQ} = S_{APK} + S_{CMQ}.$$

8. Найдите ГМТ точек пересечения медиан тупоугольных треугольников, вписанных в данную окружность.
9. Пусть две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Найдите ГМТ середин хорд XU таких, что $X \in \omega_1, Y \in \omega_2, A \in XY$.

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD , O — точка пересечения его диагоналей. Окружность с центром в точке O касается стороны BC . Докажите, что касательные к этой окружности, проведённые из точек B и C , пересекаются на AD .

2. В треугольнике ABC A_1 и B_1 — середины высот, опущенных из вершин A и B , M и H — середина AB и основание высоты из вершины C соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, M, H лежат на одной окружности.

3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что прямые DP и KL перпендикулярны.

4. В угол вписаны две окружности, одна из которых касается сторон угла в точках A и B , а другая — в точках C и D . Докажите, что окружности высекают на прямой AD равные хорды.

5. а) Вписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , невписанная — в точке N ; MP — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, P, N лежат на одной прямой.

б) Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания невписанных окружностей со сторонами BC, AC, AB соответственно, N — точка пересечения AA_1 и BB_1 , M — ближайшая к C точка пересечения вписанной окружности и CC_1 . Докажите, что $CM = NC_1$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC вовне построены квадраты $ABKL$ и $ACMN$. Докажите, что прямая, проходящая через A перпендикулярно LN , делит BC пополам.

7. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° . Из вершины B внутрь треугольника выпустили 2 луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись относительно основания AC в точках P и Q , попали в точки K и M на сторонах AB и BC соответственно. Докажите, что

$$S_{BPQ} = S_{APK} + S_{CMQ}.$$

8. Найдите ГМТ точек пересечения медиан тупоугольных треугольников, вписанных в данную окружность.

9. Пусть две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Найдите ГМТ середин хорд XY таких, что $X \in \omega_1, Y \in \omega_2, A \in XY$.