

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$, что для любого x верно равенство $[f(x)] = f([x])$?
2. Докажите, что при всех положительных a_1, a_2, \dots, a_n верно неравенство:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_2 + a_3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n + a_1}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a_2 + a_3 + a_4}{2\sqrt{2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_n + a_1 + a_2}{2\sqrt{2}}.$$

3. У Феде есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

4. Найдите все функции $f(x)$ такие что $f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y))$ для любых действительных x, y .

5. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют корни. Докажите, что по крайней мере один из трёхчленов $P(x) \pm Q(x)$ также имеет корни.

6. Существуют ли 1000 натуральных чисел таких, что наибольшие общие делители всевозможных наборов этих чисел (по два, по три, ..., по тысяче) попарно различны?

7. Натуральные числа a, b такие, что $a^2 + b$ делится на $b^2 + a$ и $b^2 + a$ является степенью некоторого простого числа. Найдите все такие числа a и b .

8. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие уравнению $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4y \cdot f(x)$ для всех x, y .

9. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ca \leq 3abc$. Докажите, что $a + b + c \leq a^3 + b^3 + c^3$.

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$, что для любого x верно равенство $[f(x)] = f([x])$?
2. Докажите, что при всех положительных a_1, a_2, \dots, a_n верно неравенство:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_2 + a_3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n + a_1}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a_2 + a_3 + a_4}{2\sqrt{2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_n + a_1 + a_2}{2\sqrt{2}}.$$

3. У Феде есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

4. Найдите все функции $f(x)$ такие что $f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y))$ для любых действительных x, y .

5. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют корни. Докажите, что по крайней мере один из трёхчленов $P(x) \pm Q(x)$ также имеет корни.

6. Существуют ли 1000 натуральных чисел таких, что наибольшие общие делители всевозможных наборов этих чисел (по два, по три, ..., по тысяче) попарно различны?

7. Натуральные числа a, b такие, что $a^2 + b$ делится на $b^2 + a$ и $b^2 + a$ является степенью некоторого простого числа. Найдите все такие числа a и b .

8. Найдите все функции $f(x)$, удовлетворяющие уравнению $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4y \cdot f(x)$ для всех x, y .

9. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ca \leq 3abc$. Докажите, что $a + b + c \leq a^3 + b^3 + c^3$.