10 класс **Проективные преобразования окружности** 13 октября 2014

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется число $(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

Утверждение 1. Если A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D при проективном преобразовании, то $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Утверждение 2. Если точки A, B, C лежат на прямой, параллельной переходящей в бесконечно удаленную, то $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Утверждение 3. Существует проективное преобразование, которое данную окружность переводит в окружность, а данную точку, лежащую внутри окружности, переводит в центр образа.

1. Пусть точки A, B, C, X, Y лежат на одной прямой, причем все точки попарно различны, кроме, быть может, точек X и Y. Докажите, что если $(ABCX) = (ABCY)$, то $X = Y$.

2. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения дигоналей.

3. Теорема Паскаля. Докажите, что точки пересечения пар противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

4. Теорема Брианшона. Докажите, что диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

5. Прямые, содержащие стороны AB и BC треугольника ABC, касаются окружности ω в точках D и E. Из точек A и C проведены вторые касательные AF и CG к окружности ω. Докажите, что прямые DG, EF и AC пересекаются в одной точке.

6. Через точку P проводятся всевозможные секущие к данной окружности ω. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к ω, проведенных в двух точках пересечения окружности и секущей.

7. Задача о бабочке. Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O, P и Q — точки пересечения AC и BD с MN. Докажите, что O — середина отрезка PQ.

8. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Из точек A_1, B_1, C_1 провели касательные A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 к вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется число $(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

Утверждение 1. Если A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D при проективном преобразовании, то $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Утверждение 2. Если точки A, B, C лежат на прямой, параллельной переходящей в бесконечно удаленную, то $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Утверждение 3. Существует проективное преобразование, которое данную окружность переводит в окружность, а данную точку, лежащую внутри окружности, переводит в центр образа.

1. Пусть точки A, B, C, X, Y лежат на одной прямой, причем все точки попарно различны, кроме, быть может, точек X и Y. Докажите, что если $(ABCX) = (ABCY)$, то $X = Y$.

2. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения дигоналей.

3. Теорема Паскаля. Докажите, что точки пересечения пар противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

4. Теорема Брианшона. Докажите, что диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

5. Прямые, содержащие стороны AB и BC треугольника ABC, касаются окружности ω в точках D и E. Из точек A и C проведены вторые касательные AF и CG к окружности ω. Докажите, что прямые DG, EF и AC пересекаются в одной точке.

6. Через точку P проводятся всевозможные секущие к данной окружности ω. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к ω, проведенных в двух точках пересечения окружности и секущей.

7. Задача о бабочке. Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O, P и Q — точки пересечения AC и BD с MN. Докажите, что O — середина отрезка PQ.

8. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Из точек A_1, B_1, C_1 провели касательные A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 к вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.