10 класс **Разная алгебра** 9 октября 2014

1. Решить в натуральных числах уравнение:

$$x^{(2^x)} = y^{(512^y)}$$

2. Пусть $a, b, c, d \geq 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$.

3. Многочлены $P(x), Q(x)$ таковы, что $P(x^3) + xQ(x^3) \vdots x^2 + x + 1$. Показать, что $P(x), Q(x) \vdots x - 1$.

4. Пусть $F(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли различные натуральные числа $a_1, a_2, ..., a_{2001}$, что $F(a_i)F(a_j)$ делится на $a_i a_j$ без остатка при $i \neq j$.

5. Пусть a, b, c стороны треугольника. Докажите неравенство:

$$\frac{a+b-c}{c} + \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} \geq \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c}$$

6. Даны два квадратных трехчлена f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырех корней многочленов f и g равна нулю и многочлен $f + g$ имеет корни. Доказать, что сумма корней многочлена $f + g$ также равна нулю.

7. Найти все многочлены $P(x, y)$ от двух переменных, такие что при любых x, y верно $P(x+y, y-x) = P(x, y)$.

8. Пусть $d(n)$- количество натуральных делителей числа n. Доказать, что последовательность $d(n^2+1)$ ни с какого момента не становится строго монотонной.

9. Докажите, что количество положительных корней многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$.

10. Числа a, b, c лежат на отрезке $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}$$

10 класс	Разная алгебра	9 октября 2014

1. Решить в натуральных числах уравнение:

$$x^{(2^x)} = y^{(512^y)}$$

2. Пусть $a, b, c, d \geq 0$, $a + b + c + d = 1$. Докажите, что $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$.

3. Многочлены $P(x), Q(x)$ таковы, что $P(x^3) + xQ(x^3) \vdots x^2 + x + 1$. Показать, что $P(x), Q(x) \vdots x - 1$.

4. Пусть $F(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли различные натуральные числа $a_1, a_2, ..., a_{2001}$, что $F(a_i)F(a_j)$ делится на $a_i a_j$ без остатка при $i \neq j$.

5. Пусть a, b, c стороны треугольника. Докажите неравенство:

$$\frac{a+b-c}{c} + \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} \geq \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c}$$

6. Даны два квадратных трехчлена f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырех корней многочленов f и g равна нулю и многочлен $f + g$ имеет корни. Доказать, что сумма корней многочлена $f + g$ также равна нулю.

7. Найти все многочлены $P(x, y)$ от двух переменных, такие что при любых x, y верно $P(x+y, y-x) = P(x, y)$.

8. Пусть $d(n)$- количество натуральных делителей числа n. Доказать, что последовательность $d(n^2+1)$ ни с какого момента не становится строго монотонной.

9. Докажите, что количество положительных корней многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$.

10. Числа a, b, c лежат на отрезке $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-a)(1-c)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \leq 1 + \sqrt{abc}$$