10 класс

Композиция поворотов

6 октября 2014

Вопрос. Какое движение есть композиция двух осевых симметрий с непараллельными осями?

1. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные $360°$, является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Что будет, если сумма углов поворотов окажется кратной $360°$?

2. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

3. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами P, Q и R. На сторонах треугольника PQR внутренним образом построены квадраты. Докажите, что их центры являются серединами сторон треугольника ABC.

4. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C – середина отрезка C_1C_2.

5. Теорема Наполеона. На сторонах произвольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

6. На двух противоположных сторонах выпуклого четырехугольника как на гипотенузах построены во внутреннюю сторону два равнобедренных прямоугольных треугольника. Оказалось, что они имеют общую вершину. Докажите, что если аналогичные треугольники построить на двух других сторонах, то и они будут иметь общую вершину.

7. На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники $A'BC$ и $B'AC$ внешним образом, а $C'AB$ – внутренним. M – центр треугольника $C'AB$. Докажите, что $A'B'M$ – равнобедренный треугольник, причем $\angle A'MB' = 120°$.

8. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую – в точке D (A лежит на отрезке CD). Пусть M и N – середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K – середина отрезка CD. Докажите, что точки M, K, A, N лежат на одной окружности.

9. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ на сторонах AB и BC отложены отрезки AK и CL, равные CD и AD соответственно. M - середина KL. Докажите, что угол $\angle AMC$ – прямой.

10. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

10 класс	Композиция поворотов	6 октября 2014

Вопрос. Какое движение есть композиция двух осевых симметрий с непараллельными осями?

1. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные $360°$, является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Что будет, если сумма углов поворотов окажется кратной $360°$?

2. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

3. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами P, Q и R. На сторонах треугольника PQR внутренним образом построены квадраты. Докажите, что их центры являются серединами сторон треугольника ABC.

4. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C – середина отрезка C_1C_2.

5. Теорема Наполеона. На сторонах произвольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

6. На двух противоположных сторонах выпуклого четырехугольника как на гипотенузах построены во внутреннюю сторону два равнобедренных прямоугольных треугольника. Оказалось, что они имеют общую вершину. Докажите, что если аналогичные треугольники построить на двух других сторонах, то и они будут иметь общую вершину.

7. На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники $A'BC$ и $B'AC$ внешним образом, а $C'AB$ – внутренним. M – центр треугольника $C'AB$. Докажите, что $A'B'M$ – равнобедренный треугольник, причем $\angle A'MB' = 120°$.

8. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую – в точке D (A лежит на отрезке CD). Пусть M и N – середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K – середина отрезка CD. Докажите, что точки M, K, A, N лежат на одной окружности.

9. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ на сторонах AB и BC отложены отрезки AK и CL, равные CD и AD соответственно. M - середина KL. Докажите, что угол $\angle AMC$ – прямой.

10. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.