Определение. Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые 2 смежные вершины покрашены в разные цвета.

Определение. Через $\chi(G)$ обозначим наименьшее число цветов, в которые можно покрасить граф G правильным образом. Такое число называется *хроматическим.*

Определение. Пусть $k > 3$. Обозначим через BG граф, отличный от полного на $k+1$ вершинах, в котором степень каждой вершины не превосходит k.

1. Пусть граф G таков, что для любого его подграфа H верно, что найдется вершина, степень которой не превосходит $k-1$. Докажите, что $\chi(G) \leq k$.

2. Пусть G – связный граф. Известно, что в графе G степень каждой вершины не превосходит k и найдётся по крайней мере одна вершина, степень которой не превосходит $k-1$. Докажите, что граф правильным образом можно раскрасить в k цветов.

3. Пусть в графе BG есть точка сочленения. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

4. Пусть в графе BG нет точек сочленения, но есть две точки A и B, при выкидывании которых граф G теряет связность.

а) Пусть A и B смежны. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

б) Пусть A и B не смежны. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

5. Пусть в графе BG нет точек сочленения и при удалении любых двух точек A и B граф не теряет связность. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

6. Теорема Брукса. Пусть дан граф BG. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

7. В компании из $2n+1$ человек известно, что для любой группы из n человек, найдётся некто, знакомый с каждым из этой группы. Докажите, что существует человек, знакомый со всеми.

8. На доске написано число 2. Два игрока по очереди прибавляют к числу на каждом ходе некоторый его делитель, отличный от самого числа. Выигрывает тот игрок, кто первым выпишет число, большее чем **а)** 2013; **б)** 2014. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

9. На плоскости выбрали 17 точек и соединили их отрезками, после чего все отрезки покрасили в 3 цвета. Докажите, что есть три точки в вершинах одноцветного треугольника.

10. В цветочном городе есть 2 партии. Каждое утро житель города меняет партию на ту, где у него больше друзей. Докажите, что Незнайка, начиная с некоторого момента, либо вообще больше не будет менять партии, либо будет менять их каждый день.

Определение. Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые 2 смежные вершины покрашены в разные цвета.

Определение. Через $\chi(G)$ обозначим наименьшее число цветов, в которые можно покрасить граф G правильным образом. Такое число называется *хроматическим.*

Определение. Пусть $k > 3$. Обозначим через BG граф, отличный от полного на $k+1$ вершинах, в котором степень каждой вершины не превосходит k.

1. Пусть граф G таков, что для любого его подграфа H верно, что найдется вершина, степень которой не превосходит $k-1$. Докажите, что $\chi(G) \leq k$.

2. Пусть G – связный граф. Известно, что в графе G степень каждой вершины не превосходит k и найдётся по крайней мере одна вершина, степень которой не превосходит $k-1$. Докажите, что граф правильным образом можно раскрасить в k цветов.

3. Пусть в графе BG есть точка сочленения. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

4. Пусть в графе BG нет точек сочленения, но есть две точки A и B, при выкидывании которых граф G теряет связность.

а) Пусть A и B смежны. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

б) Пусть A и B не смежны. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

5. Пусть в графе BG нет точек сочленения и при удалении любых двух точек A и B граф не теряет связность. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

6. Теорема Брукса. Пусть дан граф BG. Тогда $\chi(BG) \leq k$.

7. В компании из $2n+1$ человек известно, что для любой группы из n человек, найдётся некто, знакомый с каждым из этой группы. Докажите, что существует человек, знакомый со всеми.

8. На доске написано число 2. Два игрока по очереди прибавляют к числу на каждом ходе некоторый его делитель, отличный от самого числа. Выигрывает тот игрок, кто первым выпишет число, большее чем **а)** 2013; **б)** 2014. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

9. На плоскости выбрали 17 точек и соединили их отрезками, после чего все отрезки покрасили в 3 цвета. Докажите, что есть три точки в вершинах одноцветного треугольника.

10. В цветочном городе есть 2 партии. Каждое утро житель города меняет партию на ту, где у него больше друзей. Докажите, что Незнайка, начиная с некоторого момента, либо вообще больше не будет менять партии, либо будет менять их каждый день.