

Есть: Бесконечно удалённая прямая. Если две прямые параллельны в обычном смысле, то они пересекаются на бесконечно удаленной прямой.

Знаем: а) Любую прямую l проективным преобразованием можно перевести в бесконечно удаленную. Если две прямые пересекались на l , то после преобразования они станут параллельны.

б) Композиция проективного и аффинного преобразований есть проективное преобразование.

1. На недорисованной картине изображена железная дорога, проложенная через равнину и уходящая за горизонт, а также две рядом лежащие шпалы параллельные линии горизонта. С помощью одной линейки нарисуйте третью шпалу.

2. **Теорема Дезарга.** Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , AC и A_1C_1 , BC и B_1C_1 лежат на одной прямой.

3. **Теорема Паппа.** Даны две прямые l и l_1 . На прямой l расположены точки A , B , C , а на прямой l_1 — точки A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что точки пересечения прямых AB_1 и A_1B , BC_1 и B_1C , CA_1 и C_1A лежат на одной прямой.

4. **Теорема о дважды перспективных треугольниках.** Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O , а прямые AB_1 , BC_1 и CA_1 пересекаются в точке O_1 . Докажите, что прямые AC_1 , BA_1 и CB_1 пересекаются в одной точке.

5. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведены прямые, пересекающие его стороны в точках K и K' , L и L' , M и M' , N и N' . Прямые KL и MN пересекаются в точке P , прямые $K'L'$ и $M'N'$ пересекаются в точке P' . Докажите, что точки P , O и P' лежат на одной прямой.

6. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки X и Y так, что BC параллельно XY . Чевяны AM и AN пересекают XY в точках P и Q . Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения прямых MX и CQ , NY и BP , проходит через точку A .

7. Даны точки A , B , C , D , никакие три из которых не лежат на одной прямой, и точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , никакие три из которых также не лежат на одной прямой. Докажите, что проективное преобразование, переводящее A , B , C , D в A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соответственно,

а) существует;

б) единственно.

8. а) На плоскости даны точка, две прямых и пятно, которое закрывает точку пересечения прямых. Постройте одной линейкой прямую, проходящую через данную точку и точку пересечения прямых.

б) На плоскости даны две точки, прямая и пятно, которое не дает провести прямую через две данных точки. Постройте одной линейкой точку пересечения данной прямой и прямой, проходящей через две данные точки.

9. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно поделить данный отрезок пополам.

Есть: Бесконечно удалённая прямая. Если две прямые параллельны в обычном смысле, то они пересекаются на бесконечно удаленной прямой.

Знаем: а) Любую прямую l проективным преобразованием можно перевести в бесконечно удаленную. Если две прямые пересекались на l , то после преобразования они станут параллельны.

б) Композиция проективного и аффинного преобразований есть проективное преобразование.

1. На недорисованной картине изображена железная дорога, проложенная через равнину и уходящая за горизонт, а также две рядом лежащие шпалы параллельные линии горизонта. С помощью одной линейки нарисуйте третью шпалу.

2. **Теорема Дезарга.** Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , AC и A_1C_1 , BC и B_1C_1 лежат на одной прямой.

3. **Теорема Паппа.** Даны две прямые l и l_1 . На прямой l расположены точки A , B , C , а на прямой l_1 — точки A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что точки пересечения прямых AB_1 и A_1B , BC_1 и B_1C , CA_1 и C_1A лежат на одной прямой.

4. **Теорема о дважды перспективных треугольниках.** Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O , а прямые AB_1 , BC_1 и CA_1 пересекаются в точке O_1 . Докажите, что прямые AC_1 , BA_1 и CB_1 пересекаются в одной точке.

5. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведены прямые, пересекающие его стороны в точках K и K' , L и L' , M и M' , N и N' . Прямые KL и MN пересекаются в точке P , прямые $K'L'$ и $M'N'$ пересекаются в точке P' . Докажите, что точки P , O и P' лежат на одной прямой.

6. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки X и Y так, что BC параллельно XY . Чевяны AM и AN пересекают XY в точках P и Q . Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения прямых MX и CQ , NY и BP , проходит через точку A .

7. Даны точки A , B , C , D , никакие три из которых не лежат на одной прямой, и точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , никакие три из которых также не лежат на одной прямой. Докажите, что проективное преобразование, переводящее A , B , C , D в A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соответственно,

а) существует;

б) единственно.

8. а) На плоскости даны точка, две прямых и пятно, которое закрывает точку пересечения прямых. Постройте одной линейкой прямую, проходящую через данную точку и точку пересечения прямых.

б) На плоскости даны две точки, прямая и пятно, которое не дает провести прямую через две данных точки. Постройте одной линейкой точку пересечения данной прямой и прямой, проходящей через две данные точки.

9. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно поделить данный отрезок пополам.