

Соглашение. Во всех задачах алгебру сводим к геометрии (ну или к тригонометрии).

1. а) Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что $a + A = b + B = c + C = S$. Докажите, что

$$aB + bC + cA \leq S^2.$$

б) Неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 не превосходят 1. Докажите, что

$$0 \leq x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2.$$

2. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

3. Найдите минимум выражения $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 2} + \sqrt{z^2 + 3} + \sqrt{t^2 + 4}$ при условии $x + y + z + t = 10$.

4. $|x_1|, |x_2| \leq 1$. Докажите, что $\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$. Когда достигается равенство?

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{ab(a + b)} + \sqrt{bc(b + c)} + \sqrt{ca(c + a)} \geq \sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases}$$

7. а) Докажите, что среди любых четырёх чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq 1$.

б) Докажите, что среди любых шести чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Найдите $xy + 2yz + 3xz$.

Соглашение. Во всех задачах алгебру сводим к геометрии (ну или к тригонометрии).

1. а) Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что $a + A = b + B = c + C = S$. Докажите, что

$$aB + bC + cA \leq S^2.$$

б) Неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 не превосходят 1. Докажите, что

$$0 \leq x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2.$$

2. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

3. Найдите минимум выражения $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 2} + \sqrt{z^2 + 3} + \sqrt{t^2 + 4}$ при условии $x + y + z + t = 10$.

4. $|x_1|, |x_2| \leq 1$. Докажите, что $\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$. Когда достигается равенство?

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{ab(a + b)} + \sqrt{bc(b + c)} + \sqrt{ca(c + a)} \geq \sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ z = 2y^2 - 1 \\ x = 2z^2 - 1 \end{cases}$$

7. а) Докажите, что среди любых четырёх чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq 1$.

б) Докажите, что среди любых шести чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Найдите $xy + 2yz + 3xz$.