

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно взаимно однозначно, непрерывно и образом любой прямой является прямая.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.
2. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C' и D' — образы точек A, B, C и D при аффинном преобразовании.
3. Докажите, что аффинное преобразование линейно, то есть для любых векторов \vec{a} и \vec{b} и действительных α и β выполнено равенство $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})' = \alpha\vec{a}' + \beta\vec{b}'$.
4. Докажите, что для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A' , B в B' , C в C' .
5. Пусть M' и N' — образы многоугольников M и N при аффинном преобразовании. Докажите, что отношение площадей M и N равно отношению площадей M' и N' .
6. Точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах треугольника ABC таковы, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A}$. Докажите, что точки пересечения медиан у треугольников ABC , $A_1B_1C_1$ и треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1 и CC_1 , совпадают.
7. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть M — середина AD , P — точка пересечения BM и AC , Q — точка пересечения прямой, параллельной AD и проходящей через точку P , с BD . Докажите, что точки P и Q делят отрезок прямой PQ , высекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.
8. В треугольнике ABC чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Докажите, что середины отрезков CO , A_1B_1 и AB лежат на одной прямой.
9. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.
10. * Докажите, что требование непрерывности лишнее, то есть любое взаимно однозначное преобразование плоскости, которое прямые переводит в прямые, является аффинным.

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно взаимно однозначно, непрерывно и образом любой прямой является прямая.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.
2. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C' и D' — образы точек A, B, C и D при аффинном преобразовании.
3. Докажите, что аффинное преобразование линейно, то есть для любых векторов \vec{a} и \vec{b} и действительных α и β выполнено равенство $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})' = \alpha\vec{a}' + \beta\vec{b}'$.
4. Докажите, что для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A' , B в B' , C в C' .
5. Пусть M' и N' — образы многоугольников M и N при аффинном преобразовании. Докажите, что отношение площадей M и N равно отношению площадей M' и N' .
6. Точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах треугольника ABC таковы, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A}$. Докажите, что точки пересечения медиан у треугольников ABC , $A_1B_1C_1$ и треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1 и CC_1 , совпадают.
7. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Пусть M — середина AD , P — точка пересечения BM и AC , Q — точка пересечения прямой, параллельной AD и проходящей через точку P , с BD . Докажите, что точки P и Q делят отрезок прямой PQ , высекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.
8. В треугольнике ABC чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Докажите, что середины отрезков CO , A_1B_1 и AB лежат на одной прямой.
9. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.
10. * Докажите, что требование непрерывности лишнее, то есть любое взаимно однозначное преобразование плоскости, которое прямые переводит в прямые, является аффинным.