10 класс	Немного комбинаторики	18 сентября 2014

1. По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара несоседних чисел с таким же свойством.

2. Дана конечная последовательность из 0 и 1. За одну операцию можно поменять фрагмент 01 на фрагмент 1000000. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких операций.

3. На сторонах многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

4. На кольцевой автостраде стоит некоторое количество машин. Известно, что суммарное количество бензина в их баках достаточно для того, чтобы проехать всю автостраду по кругу. Докажите, что существует машина, которая может проехать всё кольцо, забирая бензин из других машин.

5. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум.

Определение. Пусть дан граф G. $d(v)$ – это степень вершины $v \in G$.

6. Критерий Дирака. Пусть $n > 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – максимальный путь в графе G, причём выполнено неравенство $d(a_1) + d(a_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе G есть цикл длины n.

7. а) Пусть для любых двух несмежных вершин u и v в графе G с n вершинами выполнено неравенство $d(u) + d(v) \geqslant n - 1$. Докажите, что в G есть гамильтонов путь.

б) Пусть для любых двух несмежных вершин u и v в графе G с n вершинами выполнено неравенство $d(u) + d(v) \geqslant n$. Докажите, что в G есть гамильтонов цикл.

10 класс	Немного комбинаторики	18 сентября 2014

1. По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара несоседних чисел с таким же свойством.

2. Дана конечная последовательность из 0 и 1. За одну операцию можно поменять фрагмент 01 на фрагмент 1000000. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких операций.

3. На сторонах многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

4. На кольцевой автостраде стоит некоторое количество машин. Известно, что суммарное количество бензина в их баках достаточно для того, чтобы проехать всю автостраду по кругу. Докажите, что существует машина, которая может проехать всё кольцо, забирая бензин из других машин.

5. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум.

Определение. Пусть дан граф G. $d(v)$ – это степень вершины $v \in G$.

6. Критерий Дирака. Пусть $n > 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – максимальный путь в графе G, причём выполнено неравенство $d(a_1) + d(a_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе G есть цикл длины n.

7. а) Пусть для любых двух несмежных вершин u и v в графе G с n вершинами выполнено неравенство $d(u) + d(v) \geqslant n - 1$. Докажите, что в G есть гамильтонов путь.

б) Пусть для любых двух несмежных вершин u и v в графе G с n вершинами выполнено неравенство $d(u) + d(v) \geqslant n$. Докажите, что в G есть гамильтонов цикл.