Функция Эйлера. Теорема Эйлера.

8 класс

15.11.14

Определение. Пусть n – натуральное число. *Функцией Эйлера* $\varphi(n)$ называется количество натуральных чисел не больших n и взаимно простых с ним.

Далее, во всех задачах n, m, a – натуральные числа, p – простое. Через (m, n) обозначается НОД чисел m и n.

1. а) Докажите, что $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$.

   б) * Пусть $(m, n) = 1$. Докажите, что $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ (это свойство функции называется мультипликативностью).

   в) Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа m на простые множители. Докажите, что

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

2. Вспомните доказательство малой теоремы Ферма (которое попроще) и докажите ***Теорему Эйлера***: если $(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n.

3. (**Мастер арифметики 2**) Найдите остаток от деления числа 5^{11234} на 666.

4. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

5. Число n - нечетно. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на n.

6. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

7. Пусть n – натуральное число. Докажите, что существует натуральное число состоящее только из нулей и ровно n единиц, делящееся на n.