Делимость, остатки и сравнения по модулю

8 класс

27.09.2014

Определение. Целые числа a, b называются *сравнимыми по модулю* m (где m - натуральное), если a и b дают одинаковые остатки при делении на m; или, что то же самое, $a-b$ делится на m. В таком случае пишут $a \equiv b \pmod{m}$.

1. Осознайте и докажите следующие свойства сравнений:
   а) $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{m}$;
   б) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$, для любого целого k;
   в) $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$;
   г) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$, для любого натурального n;
   д) $ka \equiv kb \pmod{km} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$, для любого целого k.

2. (*Признаки делимости на 9 и на 11*) Пусть натуральное число m записывается в десятичной записи в виде $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$. Докажите, что
   а) $m \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod{9}$;
   б) $m \equiv a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

3. Докажите, что для любого натурального n число $13^n + 3^{5n+2}$ кратно 10.

4. Даны натуральные числа a и n. Докажите, что в наборе чисел $0, a, 2a, 3a, \ldots, (n-2)a, (n-1)a$ все остатки при делении на n различны, если
   а) n - простое, a не кратно n;
   б) a и n - произвольные взаимно простые числа (т.е. НОД$(a, n) = 1$).

5. Натуральные числа a и n взаимно просты. Докажите, что существует натуральное число b, такое что выполнено сравнение: $ab \equiv 1 \pmod{n}$.

6. В 100-этажном здании есть лифт с двумя кнопками. Одна из кнопок поднимает лифт на 39 этажей вверх, другая опускает на 61 этаж вниз (если требуемое перемещение лифта не возможно, то при нажатии кнопки ничего не происходит). Докажите, что с любого этажа здания можно добраться до любого другого при помощи лифта.

7. Про натуральное число a известно, что оно даёт остаток 7 при делении на 9 и остаток 9 при делении на 11. Какие остатки при делении на 99 оно может давать?

8. Докажите, что из любых 13 натуральных чисел найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки по модулю 23.

9. Докажите, что для любого натурального числа k число
   а) $8k - 1$ не представимо в виде суммы трёх квадратов
   б) 10^{3k+1} не представимо в виде суммы двух кубов.

10. Найдите все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих уравнению $3^m + 7 = 2^n$.