Уравнения в целых числах. Простые множители.

8 класс

13.12.2014

1. (***Формула для количества делителей натурального числа***) Пусть число n раскладывается на простые множители как $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Как устроены разложения на простые множители делителей числа n? Выведите формулу для количества делителей числа n:
$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$
2. Докажите, что натуральное число имеет нечётное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.
3. Простой множитель p входит в разложения натуральных чисел a и b на простые множители в степенях n и m соответственно (n и m - неотрицательные целые числа). В какой степени p может входить в разложение числа $a + b$?
4. а) Докажите, что уравнение $x! + 2014 = y^2$ имеет лишь конечное число решений в натуральных числах.
   б) Докажите, что уравнение $x! + N = y^2$, где N - фиксированное натуральное число, не являющееся точным квадратом, имеет лишь конечное число решений (x, y) в натуральных числах.
5. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 5y^3 + 25z^3 = 0$.
6. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + y^3 = x^2 \cdot y^2$.
7. Решите в простых числах уравнение $x^2 + y^3 = z^4$.

Уравнения в целых числах. Простые множители.

8 класс

13.12.2014

1. (***Формула для количества делителей натурального числа***) Пусть число n раскладывается на простые множители как $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Как устроены разложения на простые множители делителей числа n? Выведите формулу для количества делителей числа n:
$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$
2. Докажите, что натуральное число имеет нечётное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.
3. Простой множитель p входит в разложения натуральных чисел a и b на простые множители в степенях n и m соответственно (n и m - неотрицательные целые числа). В какой степени p может входить в разложение числа $a + b$?
4. а) Докажите, что уравнение $x! + 2014 = y^2$ имеет лишь конечное число решений в натуральных числах.
   б) Докажите, что уравнение $x! + N = y^2$, где N - фиксированное натуральное число, не являющееся точным квадратом, имеет лишь конечное число решений (x, y) в натуральных числах.
5. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 5y^3 + 25z^3 = 0$.
6. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + y^3 = x^2 \cdot y^2$.
7. Решите в простых числах уравнение $x^2 + y^3 = z^4$.