

Подобие

8 класс

01.11.2014

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Докажите, что $AC^2 = AH \cdot AB$, $BC^2 = BH \cdot BA$, $CH^2 = AH \cdot BH$. Выведите отсюда теорему Пифагора.
2. (Теорема Вариньона) Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. При каких условиях на диагонали исходного четырёхугольника получится ромб? А прямоугольник?
3. В треугольник ABC вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне BC . Выразите длину его стороны через длину a стороны BC и длину h высоты из вершины A .
4. В неравностороннем треугольнике ABC проведена а) внутренняя; б) внешняя биссектриса AL угла A . Докажите, что $BL/CL = BA/CA$.
5. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. К ним проведена общая касательная, касающаяся окружностей в точках A и B . Выразите длину отрезка AB через r и R .
6. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка X . Прямая AX пересекает прямые BC , CD в точках P , Q . Докажите, что $AX^2 = XP \cdot XQ$.
7. (Теорема Чевы)

а) Внутри треугольника ABC отмечена точка X . Через неё и вершины треугольника проводятся прямые, пересекающие стороны BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что выполнено соотношение:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

б) На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно таким образом, что выполняется соотношение из предыдущей задачи. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

Указание: проведите через вершину прямую, параллельную другой стороне и пересеките с ней всё что шевелится.

8. На высотах BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC отмечены точки B_2 , C_2 соответственно, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.
9. В треугольнике ABC про углы известно, что $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Докажите, что $a^2 + bc = c^2$. (Традиционно в треугольнике ABC углы при вершинах A , B , C обозначаются α , β , γ соответственно, а длины сторон BC , CA , AB - буквами a , b , c ; тоже соответственно)
10. На продолжении стороны CD за точку D прямоугольника $ABCD$ отмечена точка P . M и N - середины сторон AD , BC соответственно. PM и AC пересекаются в точке Q . Докажите, что NM - биссектриса угла PNQ .