Разнобой

8 класс

18.10.14

1. Дан четырёхугольник $ABCD$, причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

2. Число n - натуральное. Докажите, что одно из трёх чисел $n, n^{119} - 1, n^{119} + 1$ делится на 239.

3. В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 до 100 кг (все толстяки разного веса). На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

4. (*Признак делимости на 7*) Докажите, что для любого натурального числа $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ выполнено сравнение $m \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} + \ldots \pmod 7$. (Отсюда, число делится на 7 тогда и только тогда, когда модуль суммы чисел, образующих нечётные группы по три цифры (начиная с единиц), взятых со знаком «+», и чётных со знаком «-» делится на 7).

5. Проведите с помощью циркуля и линейки через точку P, лежащей внутри данной окружности, хорду так, чтобы разность длин отрезков, на которые P делит хорду, имела данную величину a.

6. Какое наибольшее число пауков может ужиться на паутине, показанной на рис.? Паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем $1,1$ метра.

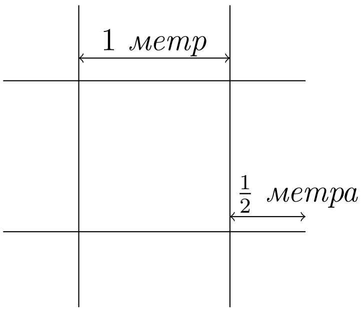

рис.

7. Дана a_n - арифметическая прогрессия натуральных чисел с разностью d (т.е. $a_n = a_0 + n \cdot d$). Пусть d не кратно p, где p - простое число. Докажите, что среди чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ можно найти такое a_k, что $a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1} + a_k$ будет делиться на p^2.

8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BB_1. Оказалось, что $BC = AB_1$. Докажите, что $BC = AB_1 = BB_1$.

9. Дана таблица размера $m \times n$ $(m, n > 1)$. В ней отмечены центры всех клеток. Какое наибольшее число отмеченных центров можно выбрать так, чтобы никакие три из них не являлись вершинами прямоугольного треугольника (катеты не обязательно должны быть параллельны сторонам таблицы)?

10. Докажите, что для любого простого p существует число, состоящее из нулей и ровно p единиц, делящееся на p.

11. По кругу расставлены 2014 чисел, каждое из которых 1 или -1 (при этом не все одинаковые). Рассматриваются всевозможные блоки из тринадцати подряд идущих чисел, в каждом из них считается произведение, а потом все вычисленные произведения суммируются. Какое максимальное произведение может принимать полученная сумма?