

Диагностическая работа. Второй (письменный) тур

1. Десять учеников решали задачи. Оказалось, что каждая задача была решена ровно семью учениками. Первые девять учеников решили по 4 задачи. Сколько задач решил десятый ученик?

Ответ: 6.

Решение: Пусть десятый ученик решил k задач, а всего задач было n . Тогда $36 + k = 7n$. Наименьшее число, начиная с 36, которое делится на 7 — это 42, т.е. $k \geq 6$. С другой стороны, нельзя решить задач больше, чем есть, поэтому $k \leq n$ и $36 + k = 7n \geq 7k$, откуда $k \leq 6$. Значит, $k = 6$.

Критерии. Получена оценка только в одну сторону: 4 балла.

2. Даны положительные числа a и b . Сумма минимального значения трёхчлена $ax^2 + 8x + b$ и минимального значения трёхчлена $bx^2 + 8x + a$ равна нулю. Найдите эти минимальные значения.

Ответ: Оба нули.

Решение: Т.к. a и b положительные, то ветви парабол смотрят вверх и минимальные значения достигаются в вершине. У первой параболы вершина в точке $-\frac{4}{a}$, а значение — $\frac{ab-16}{a}$. У второй — $\frac{ab-16}{b}$. Тогда $0 = \frac{ab-16}{a} + \frac{ab-16}{b} = (ab-16)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$. Вторая скобка не может быть нулём, опять же из-за положительности a и b , значит $ab = 16$. Тогда каждое из минимальных значений — ноль.

Критерии. Пропущен случай деления на ноль: -1 балл

3. Сколько существует перестановок $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_8)$ чисел $(1, 2, 3, \dots, 8)$ для которых $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 = 0$?

Ответ: $4608 = 4! \cdot 4! \cdot 2 \cdot 4$.

Решение: Сумма чисел от 1 до 8 равна 36, поэтому нам нужно собрать группу (a_1, a_3, a_5, a_7) из четырёх чисел с суммой 18, оставшиеся четыре числа тоже дадут сумму 18. Рассмотрим, например, группу, в которой есть число 8. Сумма оставшихся трёх чисел равна 10. Таких групп четыре: $1+2+7$, $1+3+6$, $1+4+5$, $2+3+5$. Тогда у нас есть 4 способа распределить наши числа в две группы с суммой 18. Внутри каждой группы $4!$ способов пронумеровать числа, а также группы можно поменять местами, поэтому всего способов $4! \cdot 4! \cdot 2 \cdot 4 = 4608$.

Критерии. Получен ответ в два раза меньше или больше : -2 балла.

Выделены верные группы, но дальнейших продвижений нет: не более 3 баллов.

4. Даны натуральные числа $m < n$. Первые две цифры после запятой в десятичной записи дроби $\frac{m}{n}$ образуют число 74. Найдите наименьшее возможное значение числа n .

Ответ: 27.

Решение: Перепишем условие $\frac{74}{100} \leq \frac{m}{n} < \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Тогда $0 < \frac{3}{4} - \frac{m}{n} < \frac{1}{100}$, $0 < \frac{3n-4m}{4n} < \frac{1}{100}$. Из первого неравенства понимаем, что $3n - 4m \geq 1$, а из второго $-n > 25(3n - 4m) \geq 25$. Для $n = 26$ подходит только $3n - 4m = 1$, но тогда m — нецелое, что невозможно. Для $n = 27$ подходит $m = 20$.

Критерии. Указан верный ответ: 1 балл.

5. На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, выбраны точки P и Q таким образом, что точка P лежит между A и Q , а прямые BQ и CP — биссектрисы углов AQC и DPB соответственно. Кроме того, $\angle QBP + \angle ABQ = \angle DCP + \angle PCQ = 180^\circ$. Докажите, что $\angle A = \angle D$.

Решение: Заметим, что прямая BQ является биссектрисой внешнего угла треугольника ABP . Рассмотрим точку, симметричную точке A относительно прямой BQ . Тогда она попадет на луч PB и на луч QC . Следовательно, эти лучи пересекаются в точке K , симметричной A относительно прямой BQ . Аналогично, точка K симметрична D относительно прямой PC . Тогда $\angle A = \angle PKQ = \angle D$.

6. В классе 89 учеников, и каждый день трое из них назначаются дежурными. Докажите, что можно так организовать дежурства, что через некоторое время каждые два ученика побывают вместе ровно в трёх дежурствах.

Решение: Решим задачу в общем виде для произвольного количества людей. Пусть количество людей равно n . Расставим людей по кругу через равные расстояния (в вершинах правильного n -угольника). Каждые два человека определяют сторону или диагональ многоугольника. Рассмотрим все тройки людей, соответствующие равнобедренным треугольникам с вершинами в вершинах n -угольника, причем все равносторонние треугольники среди них возьмем в трех экземплярах (равносторонние треугольники встретятся только если n делится на 3). Нетрудно убедиться, что каждая сторона или диагональ n -угольника входит ровно в три равнобедренных треугольника — один раз как основание, и два раза как боковая сторона, а в случае равностороннего треугольника — по одному разу в каждый из трех экземпляров. Организуем дежурства, соответствующие равнобедренным треугольникам, тогда каждые два человека побывают ровно в трех нарядах.