

Очный отбор 8 класса

Задача 1. Бревно длиной 10 м распилили на бревна длиной 1, 2, 3, 4 м (слева направо). Потом сделали ещё несколько распилов, не меняя полученные части местами. После этого оказалось, что каждый кусок длиннее своего соседа справа. Какое минимальное количество частей могло получиться?

Ответ: 16.

Решение. Оценка: каждая часть, получившаяся из куска длины 2 метра, меньше метра. Тогда их не менее трёх. Значит, длина самой правой из них меньше $2/3$ метра. Бревно длины 3 метра распиливали на брёвнышки длины менее $2/3$ метра. Поэтому их не менее, чем $3 : 2/3 = 4.5$. То есть хотя бы 5. Аналогично бревно длины 4 метра распиливали на брёвнышки длины менее $3/5$ метра. Получилось не меньше $4 : 3/5 = 20/3$ частей. То есть хотя бы 7. Итого брёвнышек не меньше $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Пример: выберем достаточно маленькое число $\varepsilon > 0$ и распилим брёвна на части

$$1, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \varepsilon, \quad \frac{3}{5} + 2\varepsilon, \frac{3}{5} + \varepsilon, \frac{3}{5}, \frac{3}{5} - \varepsilon, \frac{3}{5} - 2\varepsilon, \\ \frac{4}{7} + 3\varepsilon, \frac{4}{7} + 2\varepsilon, \frac{4}{7} + \varepsilon, \frac{4}{7}, \frac{4}{7} - \varepsilon, \frac{4}{7} - 2\varepsilon, \frac{4}{7} - 3\varepsilon.$$

□

Критерии

- (О-) В оценке минимального числа частей есть логические ошибки. Типичная ошибка: размер очередной части сравнивается не со средним арифметическим частей предыдущего бревна (скажем, $x < 2/3$), а с выбранным при построении примера значением ($x < 0.66$, что не обязательно так) – **не выше 5 баллов**.
- (П-) Верно оценено наименьшее возможное количество частей, которые могли получиться, но явный пример или неявное доказательство существования нужных распилов полностью отсутствует – **не выше 5 баллов**.

Задача 2. Про натуральное число $n > 1$ известно, что $3n + 1$ является точным квадратом. Докажите, что $n + 1$ представимо в виде суммы трех квадратов натуральных чисел.

Решение. Очевидно, что $3n + 1$ не делится на 3. Значит, это число является точным квадратом числа вида $3k + 1$ или $3k - 1$. Тогда есть два случая.

$$1. \quad 3n + 1 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \implies n + 1 = 3k^2 + 2k + 1 = k^2 + k^2 + (k + 1)^2.$$

$$2. 3n + 1 = (3k - 1)^2 = 9k^2 - 6k + 1 \implies n + 1 = 3k^2 - 2k + 1 = k^2 + k^2 + (k - 1)^2.$$

В обоих случаях требуемое доказано. $\square$

Задача 3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A . Точка D симметрична точке A относительно гипотенузы BC . Оказалось, что D лежит на средней линии треугольника ABC . Найдите углы исходного треугольника.

Ответ: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Решение. Обозначим середину отрезка BC через M , середину отрезка BA через N . Не умаляя общности можно считать, что точка D лежит на прямой MN (иначе переименуем B в C и наоборот). Тогда прямая MD параллельна AC , так как содержит среднюю линию MN . Тогда $\angle DMC = \angle ACM = \angle DCM$. Последнее равенство следует из симметрии относительно BC . Из нее же следует $DM = AM = CM$ (так как $\angle BAC = 90^\circ$), тогда в треугольнике MCD $\angle MDC = \angle MCD$. Значит, в треугольнике MCD все углы равны. Тогда $\angle BCD = \angle BCA = 60^\circ$, а $\angle ABC = 90^\circ - \angle BCA = 30^\circ$. $\square$

Задача 4. В классе $2n$ учеников, некоторые из которых дружат, причем каждый ученик с кем-то дружит. Докажите, что из них можно выбрать n учеников так, чтобы любой ученик был выбран или дружил с выбранным школьником. Дружба взаимна.

Решение. Введём граф: ученики — вершины, дружба — рёбра. Разобьём граф на компоненты связности, в каждой компоненте связности выделим остовное дерево и раскрасим его правильным образом в два цвета. В каждом дереве выберем в качестве искомого всех учеников того цвета, вершин которого в этом дереве меньше. Получится, что выбрано не больше половины всех учеников, и каждый ученик выбран либо дружит с выбранным. Если выбрано меньше половины всех учеников, дополнительно выберем произвольных учеников, чтобы выбранных стало ровно n .

Альтернативное решение. Назовём группу детей *хорошей*, если каждый из учеников класса либо в ней состоит, либо дружит с кем-то из неё. Рассмотрим самую маленькую хорошую группу, обозначим множество входящих в неё детей через A , а множество всех остальных детей обозначим через B . Докажем, что группа B — тоже хорошая группа.

Предположим, что это не так: тогда есть такой ребёнок $a \in A$, который не дружит ни с кем из группы B . Выкинем ребёнка a из группы A . Раз группа A — наименьшая хорошая группа, то $A \setminus \{a\}$ не является хорошей группой, и тогда в множестве $B \cup \{a\}$ должен найтись кто-то, кто не дружит ни с кем из множества $A \setminus \{a\}$. Но раз сама группа A была хорошей, то у любого ребёнка из группы B был друг в A и всё ещё есть друг в $A \setminus \{a\}$, так как никто из группы B не дружит с учеником a . Тогда учеником без друзей в группе $A \setminus \{a\}$ может оказаться только

ребёнок a . Но в этом случае у ребёнка a вообще нет друзей, что противоречит условию.

Таким образом, обе группы A и B — хорошие, и $|A| + |B| = 2n$. Тогда в одной из них (на самом деле в A) не больше n учеников. Выберем в качестве искомым всех учеников группы A и ещё нескольких любых, чтобы стало ровно n .

□

Задача 5. Существует ли бесконечная последовательность простых натуральных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots$, для которой выполнено $p_{n+1} = 2p_n \pm 1$ для всех натуральных n ?

Ответ: Нет.

Решение. Допустим, что такая бесконечная последовательность существует. Эта последовательно возрастает, и можно считать, что $p_1 > 3$, так как в противном случае можно выбросить из начала последовательности несколько первых элементов и работать с оставшейся подпоследовательностью.

Заметим, что если $p_n \equiv 1 \pmod{3}$, то $p_{n+1} \equiv 2p_n \pm 1 \equiv 2 \pm 1 \pmod{3}$. Раз p_{n+1} не делится на 3, то знака «+» в последнем выражении быть не может, и тогда $p_{n+1} = 2p_n - 1$ и $p_{n+1} \equiv 1 \pmod{3}$. Рассуждая аналогично с $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$, получаем, что в этом случае при всех n выполнено $p_{n+1} = 2p_n - 1$.

Если же $p_n \equiv 2 \pmod{3}$, то $p_{n+1} \equiv 2p_n \pm 1 \equiv 4 \pm 1 \pmod{3}$. Раз p_{n+1} не делится на 3, то знака «−» в последнем выражении быть не может, и тогда $p_{n+1} = 2p_n + 1$ и $p_{n+1} \equiv 2 \pmod{3}$. Рассуждая аналогично с $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$, получаем, что в этом случае при всех n выполнено $p_{n+1} = 2p_n + 1$.

В обоих случаях рассмотрим число p_{p_1} . В первом случае оно равно

$$p_{p_1} = 2p_{p_1-1} - 1 = 4p_{p_1-2} - 3 = 8p_{p_1-3} - 7 = \dots = 2^{p_1-1}p_1 - (2^{p_1-1} - 1),$$

а во втором аналогично $p_{p_1} = 2^{p_1-1}p_1 + (2^{p_1-1} - 1)$. Но в каждом из двух случаев число p_{p_1} делится на p_1 , так как $2^{p_1-1} - 1$ делится на p_1 по малой теореме Ферма. Получается, что число p_{p_1} не может быть простым. Противоречие.

□

Критерии

(mod 3) Рассмотрены остатки элементов последовательности при делении на 3 и сделан вывод, что знак «+» или «−» в соотношении для последовательности всё время должен выбираться одинаково — **2 балла**.

Задача 6. Фигура на шахматной доске может ходить из k -й строки в любую клетку k -го столбца для всех $k = 1, 2, \dots, 8$. Докажите, что эта фигура может обойти все клетки доски по разу и вернуться в исходную.

Решение. Можно обойти клетки так, как показано на рисунке.

64	63	61	59	57	55	53	51
62	49	48	46	44	42	40	38
60	47	36	35	33	31	29	27
58	45	34	25	24	22	20	18
56	43	32	23	16	15	13	11
54	41	30	21	14	9	8	6
52	39	28	19	12	7	4	3
1	50	37	26	17	10	5	2

Есть и другие примеры.

