

## Второй очный отбор 8 класса

**Задача 1.** Саша и Андрей написали на 100 карточках все натуральные числа от 1 до 100 (на каждой карточке — ровно одно число), после чего разделили карточки между собой. Каждый из них выложил свои карточки в ряд и получил длинное число. Могут ли длинные числа Саши и Андрея совпасть?

*Ответ:* Нет.

*Решение.* Предположим противное: пусть длинные числа Саши и Андрея совпали. Одному из мальчиков досталась карточка с числом 100, и у этого мальчика в десятичной записи его длинного числа присутствуют два нуля подряд. Но тогда и у другого мальчика должны в его длинном числе должны откуда-то взяться два нуля подряд. Однако, это невозможно: ни на какой другой карточке двух нулей подряд нет, и на стыке двух карточек два тоже не могли возникнуть, ведь первая цифра числа на любой карточке отлична от нуля. Противоречие.

*Замечание.* У этой задачи есть много других решений. Противоречие можно вывести из того, что суммарное число цифр «0» на карточках нечётно (их 11), или что суммарное число цифр «1» на карточках нечётно (их 21), или что сумма всех цифр на карточках нечётна.

□

### Критерии

(Ц) Есть идея считать количества отдельных цифр, не доведённая до противоречия — **1 балл**.

**Задача 2.** Стас загадал три произвольных натуральных числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Если путник назовёт Стасу три натуральных числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то Стас скажет ему, чему равно  $ax + by + cz$ . Как за два вопроса путник может угадать числа Стаса?

*Решение.* В первый вопрос назовём Стасу числа

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1,$$

и в ответ Стас назовёт нам их сумму  $ax + by + cz = x + y + z = S$ . Далее выберем натуральное число  $10^k$ , большее  $S$ , и вторым вопросом назовём Стасу числа

$$a = 10^{2k}, \quad b = 10^k, \quad c = 1.$$

Каждое из чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , загаданных Стасом, меньше их суммы  $S$  и следовательно меньше чем  $10^k$ . Получается, что в каждом из чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$  не больше чем  $k$  цифр. Сложим числа  $10^{2k}x$ ,  $10^ky$ ,  $z$  в столбик. Легко понять, что за счёт неравенств  $x, y, z < 10^k$  ненулевые разряды эти трёх чисел не пересекаются и

поэтому в результате сложения получится число, у которого в последних  $k$  разрядах стоит число  $z$ , в следующих  $k$  разрядах — число  $y$ , в остальных — число  $x$ . Но тогда значению суммы  $10^{2k}x + 10^ky + z$  легко можно будет определить все три числа  $x, y, z$ .

*Замечание.* В любом верном решении этой задачи коэффициенты, выбранные во втором вопросе, обязательно должны зависеть от ответа, который нам сообщил Стас на первый вопрос. Несложно доказать, что для любых фиксированных натуральных чисел  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  существуют такие натуральные числа  $m$  и  $n$ , что у системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = m; \\ a_2x + b_2y + c_2z = n; \end{cases}$$

больше одного решения в натуральных числах. Поэтому все решения, где вторая тройка коэффициентов фиксированная (не зависит от ответа Стаса на первый вопрос) — гарантированно неверные.  $\square$

### Критерии

- (0) Приведён алгоритм, где второй вопрос путника не зависит от ответа Стаса на первый вопрос — **0 баллов**.
- ( $10^k$ ) Есть идея подставлять большие степени числа 10, но при этом не конкретизировано, насколько большие — **3 балла**.

**Задача 3.** Петя вырезал из доски  $9 \times 9$  по клеткам 14 прямоугольников  $1 \times 5$  (он мог вырезать их как по горизонтали, так и по вертикали). Докажите, что центр доски остался невырезанным.

*Решение.* Будем доказывать от противного: предположим, что один из прямоугольников покрывает центральную клетку. Рассмотрим все клетки, лежащие в объединении пятой строки и пятого столбца доски. Всего в этом кресте  $9 + 9 - 1 = 17$  клеток.

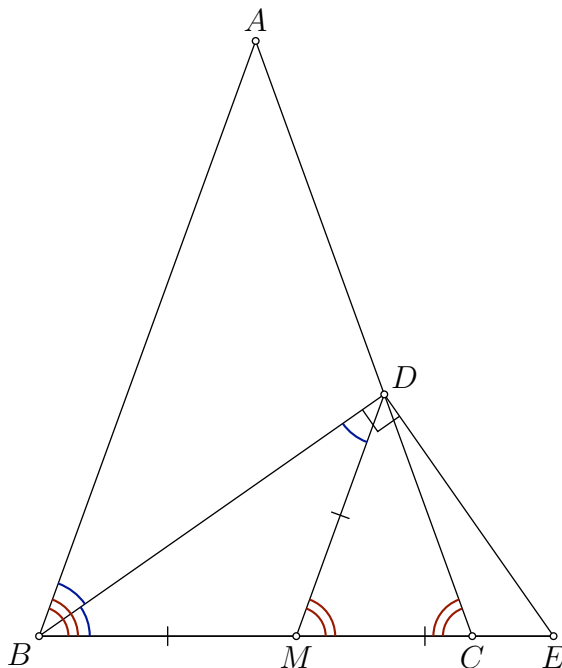
Заметим, что прямоугольник, покрывающий центральную клетку, обязан покрывать ещё 4 клетки рассматриваемого креста, то есть суммарно он покрывает 5 клеток креста. Легко понять, что как бы ни был расположен любой из 13 оставшихся прямоугольников, он будет задевать ровно одну клетку рассматриваемого креста. Но тогда получается, что суммарно все 14 прямоугольников содержат  $5 + 13 = 18$  клеток креста, что больше, чем число клеток в кресте. Противоречие.  $\square$

### Критерии

- (9П) Для произвольного расположения прямоугольника, закрывающего центр, рассмотрен только тот случай, когда содержащий его прямоугольник  $5 \times 9$  разбит на девять прямоугольников  $5 \times 1$  — **1 балл**.

**Задача 4.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) проведена биссектриса  $BD$  угла при вершине  $B$  (точка  $D$  лежит на стороне  $AC$ ). Перпендикуляр к прямой  $BD$  в точке  $D$  пересекает продолжение стороны  $BC$  в точке  $E$ . Найдите длину отрезка  $BE$ , если известно, что  $CD = 5$ .

Ответ: 10.



*Решение.* Проведём медиану  $DM$  в прямоугольном треугольнике  $BDE$ . Медиана в прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы, а значит  $DM = MB$ . Следовательно,  $\angle MDB = \angle MBD$  и тогда

$$\angle DME = \angle MDB + \angle MBD = 2\angle MBD = \angle ABC = \angle DCB.$$

Из равенства углов  $\angle DME$  и  $\angle DCB$  следует равнобедренность треугольника  $MDC$  ( $MD = DC$ ). Но тогда  $BE = 2DM = 2DC = 2 \cdot 5 = 10$ .  $\square$

**Критерии**

- (•) Введена точка  $F$  пересечения прямых  $DE$  и  $AB$  и замечено, что треугольник  $FBE$  — равнобедренный ( $BE = BF$ ) — **1 балл**.

**Задача 5.** В произведении  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  разрешается приписать некоторым сомножителям восклицательный знак (при этом сомножитель  $k$  заменяется на  $k!$ ). При каких  $n$  в результате можно получить точный квадрат?

Ответ: Для любых составных  $n$  и для  $n = 1$ .

*Решение.* Докажем, что если  $n$  — простое число, то точный квадрат получить не получится. Для ясности обозначим  $n$  через  $p$ , разложим все числа в произведении на простые множители. Заметим, что ни для чисел  $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ , ни для чисел  $1!, 2!, 3!, \dots, (n-1)!$  в разложение любого из них простой множитель  $p$  в принципе не входит. Этот множитель входит лишь в разложение числа  $n$  либо числа  $n!$ , причём в обоих случаях входит ровно в первой степени. Получается, что как бы ни были приписаны факториалы, простой множитель  $p$  будет входить в разложение на простые множители всего произведения ровно в первой степени. Но тогда произведение никак не может оказаться точным квадратом.

Докажем теперь, что для составных  $n$  заменить некоторые множители на факториалы и получить квадрат действительно возможно.

Разберём отдельно случай, когда само число  $n$  — точный квадрат (скажем,  $n = k$ ). В этом случае добавим факториал только к последнему сомножителю:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1))^2 \cdot n = ((n-1)! \cdot k)^2.$$

Осталось разобрать случай, когда число  $n$  составное и не является точным квадратом. В этом случае число  $n$  можно представить как произведение двух различных чисел  $n = a \cdot b$ , причём  $1 < a < b < n$ . Если  $b \neq a + 1$ , то припишем факториалы у чисел  $a$ ,  $(a+1)$ ,  $b$ ,  $(b+1)$ ,  $n$ . Получим:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1)}_{(a-1)!} \cdot \underbrace{a! \cdot (a+1)! \cdot (a+2) \cdot \dots \cdot (b-1)}_{(b-1)!} \cdot \underbrace{b! \cdot (b+1)! \cdot (b+2) \cdot \dots \cdot (n-1)}_{(n-1)!} \cdot n! = \\ & = ((a-1)!)^2 \cdot a \cdot ((b-1)!)^2 \cdot b \cdot ((n-1)!)^2 \cdot n = ((a-1)! \cdot (b-1)! \cdot (n-1)! \cdot ab)^2. \end{aligned}$$

Если же  $b = a + 1$ , то есть  $n = a(a+1)$ , припишем знак «!» к  $a$ , к  $(a+2)$  и к  $n$ :

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1)}_{(a-1)!} \cdot \underbrace{a! \cdot (a+1) \cdot (a+2)! \cdot (a+3) \cdot \dots \cdot (n-1)}_{(n-1)!} \cdot n! = \\ & = ((a-1)!)^2 \cdot a \cdot (a+1) \cdot ((n-1)!)^2 \cdot n = ((a-1)! \cdot (n-1)! \cdot a(a+1))^2. \end{aligned}$$

□

## Критерии

Баллы за критерии ниже складываются, в том числе штрафы.

- ( $p$ ) Доказано, что для простых  $n$  точный квадрат получиться не мог — **2 балла**.
- ( $k^2$ ) Доказано, что все точные квадраты подходят — **1 балл**. Если верное в целом решение не работает в случае точного квадрата — **снимается 1 балл**.
- ( $\bullet$ ) Доказано, что под условие подходит какая-либо бесконечная последовательность составных чисел, отличная от полных квадратов (например, все чётные  $n > 2$  или все числа вида  $n = a(a+1)$ ) — **1 балл**. Если верное в целом

решение не работает на какой-то бесконечной последовательности чисел, отличных от полных квадратов — **снимается 1 балл.**

**Задача 6.** Есть таблица  $15 \times 100$  (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух различных клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.

*Решение.* Заметим, что для любых двух соседних строк сумма номеров столбцов, в которых стоят фишки в этих строках, отличается на  $\pm 1$ . Следовательно, есть ровно 50 строк, в которых сумма номеров столбцов двух фишек в этих строках чётна. Рассмотрим любую из этих строк.

Раскрасим строку шахматно. Раз сумма номеров столбцов фишек чётна, то фишки в этой строке должны стоять на клетках одного цвета. Число способов поставить обе фишки на две различные клетки белого цвета равно  $C_8^2 = 28$ ; на клетки чёрного цвета —  $C_7^2 = 21$ . Получается, что в рассматриваемых 50 строках есть лишь  $28 + 21 = 49$  вариантов возможного расположения фишек. По принципу Дирихле, найдутся две строки с одинаковым расположением пары фишек.  $\square$

*Критерии*

- (0) Подсчитано общее число способов  $C_{15}^2 = 105$  поставить фишки в две различные клетки строки без иных продвижений — **0 баллов.**