

Очная диагностическая работа

Задача 1. В компании 18 человек, причём каждый из них знаком не менее, чем с 12 из остальных. Верно ли, что любые трое имеют общего знакомого среди остальных?

Ответ: Не верно.

Решение. Приведём пример, когда это не верно. Возьмём три человека a, b, c , а остальных людей разобьём на три группы по 5 людей — X, Y, Z . Тогда пусть a знает всех, кроме себя и людей из группы X , b — всех, кроме себя и людей из группы Y , а c — всех, кроме себя и людей из группы Z , а все остальные люди, кроме a, b, c , знакомы между собой. Тогда a, b, c знают по $17 - 5 = 12$ человек, остальные — по 16, а у a, b, c нет общего знакомого среди остальных. $\square$

Задача 2. Саша изучил, какие числа можно получить, если зачеркнуть в натуральном числе N одну цифру, и обнаружил, что какие-то два из них отличаются на 2027. Затем он изучил, какие числа можно получить, если зачеркнуть одну цифру в числе $N + 20$. Могут ли какие-то два из них отличаться на 202?

Ответ: Не могут.

Решение. Предположим, что могут. Заметим, что тогда оба раза одно из чисел было получено вычёркиванием последней цифры — иначе бы разность полученных чисел заканчивалась бы на 0. Тогда в первый раз одно из чисел заканчивается на последнюю цифру числа N , а другое — на предпоследнюю. Аналогично с $N + 20$. Заметим, что прибавление 20 не поменяло чётности двух последних цифр. Но с другой стороны в первый раз их разность была нечётной, а в другой — чётной. Противоречие. $\square$

Задача 3. Маша красит в чёрный некоторые клетки белого клетчатого квадрата 13×13 . Она хочет, чтобы в любых двух соседних столбцах было не больше k чёрных клеток, а в любых двух соседних строках — не менее $k + 1$ чёрной клетки. Для какого наименьшего k Маше удастся это сделать?

Ответ: 6

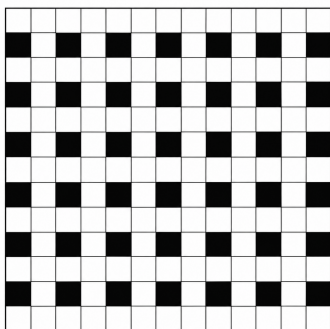
Решение. Оценка. Разобьём первые 12 строк на пары соседних. В каждой паре должно быть хотя бы $k + 1$ чёрных клеток. То есть всего их на доске хотя бы $6(k+1)$. Далее. Заметим, что в 12-м и 13-м столбце суммарно не более k клеток, а значит и в 13-м столбце самом по себе тоже не более k клеток. Теперь разобьём первые 12 столбцов на пары соседних. В каждой из пар не более k чёрных клеток, таких пар 6, а также есть 13-ый столбец, в котором также не более k

чёрных клеток. Значит всего их на доске не более чем $6k + k = 7k$. Получаем неравенство

$$6(k + 1) \leq 7k$$

из которого получаем, что $k \geq 6$.

Пример.



□

Задача 4. Даша поставила кубик со стороной 1 на какую-то клетку белой доски 100×100 . На каждой грани куба нарисована стрелочка, указывающая вверх, влево, вниз или вправо. Каждую минуту Даша смотрит на кубик сверху и перекатывает его в направлении стрелки. Известно, что кубик никогда не упадёт с доски. Алла следит за движениями кубика, и каждый раз, когда он покидает очередную клетку, красит её в красный цвет. Докажите, что на доске никогда не появится красный квадрат 5×5 .

Решение. Заметим, что у кубика есть 6 вариантов, какой гранью вверх он может стоять, и каждая из этих граней может быть повёрнута одним из 4 различных способов. Значит всего возможных положений кубика $6 \cdot 4 = 24$. Тогда среди первых 25 положений кубика какие-то два точно совпали. Пусть между этими двумя положениями прошло t ходов. Если эти положения находятся на разных клетках доски, то каждые t ходов мы будем смещаться на столько же клеток, пока не упадём с доски. Значит в обоих положениях мы стояли на одной клетке. Но тогда с этого момента мы заиклимся и не будем попадать на новые клетки. Но к этому моменту мы посетили не больше 24 клеток, а $5 \cdot 5 > 24$. □

Задача 5. Арсений написал на доске в ряд сто целых чисел. За один ход Костя выбирает несколько стоящих подряд чисел, а Арсений либо вычитает из всех них единицу, либо прибавляет к ним все единицу. Докажите, что Костя может действовать так, что через несколько ходов на доске окажется хотя бы 98 чисел, делящихся на 4.

Решение. Вместо чисел будем рассматривать их остатки от деления на 4. Возьмем крайнее слева ненулевое число. Если оно 2, выделим его, и Арсений вернет нам число 1 или 3. Затем сделаем все описанное с крайним справа ненулевым числом. Итак, мы можем считать, что крайние слева и справа ненулевые числа нечетны. Если они различны, выделим весь ряд между этими числами (включая сами числа), и Арсений вместо одного из них вернет нам 0. Количество нулей с краю увеличилось на 1. Будем повторять описанную выше процедуру, пока не окажется, что крайние слева и справа ненулевые числа a и b соответственно нечетны и равны. Выберем b . Если Арсений вернет нам 0, то число нулей с краю увеличилось, и далее мы снова повторяем описанную выше процедуру. В противном случае Арсений вернет вместо b двойку. Тогда выберем все числа после a до стоящей на месте b двойки включительно. Если Арсений вместо этой двойки вернет нам $b + 2$ (а точнее остаток $b + 2$ при делении на 4), то a и $b + 2$ нечетны и различны, и следующим ходом мы сможем увеличить число стоящих с краю нулей. Если же Арсений вернет нам b , то он прибавил ко всем выбранным нами числам по 1, если $b = 3$, или вычел из них по 1, если $b = 1$. Но это значит, что мы под страхом появления с краю нового нуля заставим Арсения на каждом четном ходу либо все время прибавлять по 1, либо все время вычитать по 1 из чисел любого отрезка, содержащего b и не содержащего a (а нечетными ходами Арсений будет превращать b в 2). Но тогда мы, очевидно, сможем последовательно (слева направо) сделать нулями все числа между a и b , а следовательно все числа, кроме a, b , стали нулями, то есть их хотя бы 98. $\square$

Задача 6. Три натуральных числа $a < b < c$ таковы, что $b - a = c - b$. Известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = b \cdot (b - a)^2.$$

Найдите все возможные значения c .

Ответ: $c = 21$

Решение. Пусть $a = b - d$, тогда $c = b + d$. Тогда

$$(b - d)^2 + b^2 + (b + d)^2 = bd^2,$$

откуда

$$3b^2 = d^2(b - 2).$$

Заметим, что $3b^2$ делится на d^2 , а значит b^2 делится на d^2 , тогда $b = kd$. Получаем

$$3k^2 = kd - 2,$$

откуда следует, что 2 делится на k . Случай $k = 1$ невозможен так как тогда $a = b - d = 0$. Пусть $k = 2$. $3k^2 = kd - 2 \Rightarrow d = 7, b = 2d = 14, c = b + d = 21$. $\square$