

Очный тур

1. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непостоянная функция. Докажите, что существуют действительные числа x, y , для которых $f(x+y) < f(xy)$.

Решение. Предположим, таких x и y не существует, то есть

$$f(x+y) \geq f(xy) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Докажем, что тогда $f(0) = f(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}$, то есть f — постоянная функция. Во-первых, подставив $x = 0$ и $y = a$, заметим, что

$$f(a) \geq f(0) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Затем, если $a < 0$, можно подставить $x = \sqrt{-a}$ и $y = -\sqrt{-a}$, тогда получим $f(0) \geq f(a)$. Следовательно, $f(a) = f(0)$ для всех $a < 0$. Наконец, если $a > 0$, то подстановка $x = y = \sqrt{a}$ даст нам

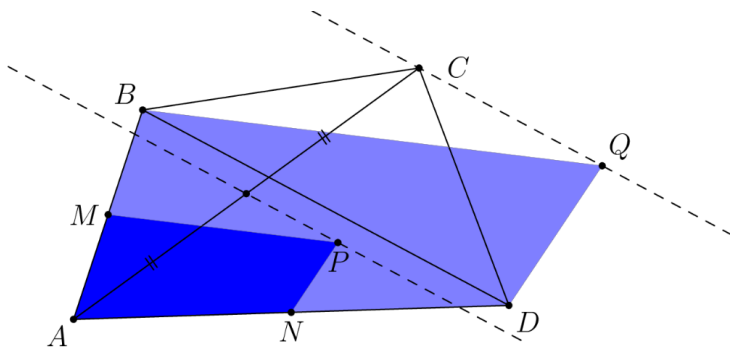
$$f(a) \leq f(-2\sqrt{a}) = f(0),$$

где последнее равенство справедливо, поскольку $-2\sqrt{a} < 0$. Таким образом, $f(a) = f(0)$ для всех a . Полученное противоречие завершает доказательство.

2. Дан выпуклый четырёхугольник. Петя отмечает внутри него точку и соединяет её с серединами сторон четырёхугольника. При этом четырёхугольник разбивается на четыре куса. Всегда ли Петя может выбрать точку так, чтобы эти четыре куска имели равные площади?

Ответ: всегда.

Решение. Обозначим четырёхугольник $ABCD$, пусть также M — середина AB , N — середина AD , P — искомая точка, Q — образ P при гомотетии с центром A и коэффициентом 2. Докажем сразу, что точка Q лежит по ту же сторону от BD , что и точка C . Это эквивалентно (посредством гомотетии) тому, что P лежит снаружи треугольника AMN . Если это не так, то S_{AMPN} меньше S_{AMN} , которая равна четверти S_{ABD} , и тогда S_{AMPN} не смогла бы равняться четверти S_{ABCD} . Итак, Q лежит по ту же сторону от BD , что и точка C .



Условие $S_{AMPN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ эквивалентно $S_{ABQD} = S_{ABCD}$. Последнее в свою очередь эквивалентно $S_{CBD} = S_{QBD}$, что равносильно $CQ \parallel BD$, поскольку C и Q лежат по одну сторону от прямой BD . Поскольку при гомотетии прямые переходят в параллельные, последнее условие эквивалентно тому, что P лежит на прямой, параллельной BD и проходящей через середину AC .

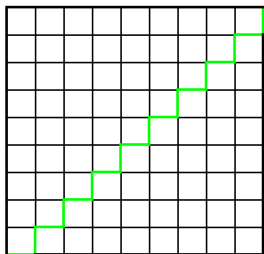
Повторив аналогичные рассуждения для вершин B , C и D , увидим, что равенство площадей из условия эквивалентно 1) P лежит на прямой, параллельной BD и проходящей через середину AC , и 2) P лежит на прямой, параллельной AC и проходящей через середину BD . Тогда Пете достаточно отметить P на пересечении указанных прямых.

Осталось лишь доказать, что такая точка лежит внутри четырёхугольника. Поскольку указанные прямые параллельны сторонам параллелограмма Вариньона, достаточно доказать, что середины AC и BD лежат внутри этого параллелограмма. Но если середина AC лежит вне него, то, не умаляя общности, она лежит внутри треугольника AMN , то есть при гомотетии с коэффициентом 2 и центром в A попадёт внутрь треугольника ABD . Однако при такой гомотетии середина AC переходит в C , что даёт противоречие.

3. Дана клетчатая сетка 2025×2025 , все границы клеток покрашены в чёрный цвет. За один ход можно выбрать произвольный клетчатый прямоугольник и покрасить его границу в красный цвет (чёрные отрезки границы при этом перекрасятся в красный, а красные останутся красными). За какое наименьшее число ходов можно сделать всю сетку красной?

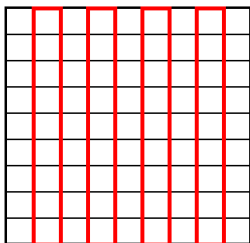
Ответ: 2025.

Решение. Отметим нижнюю и правую сторону каждого квадрата на главной диагонали доски (диагональ из левого нижнего угла в правый верхний), всего $2 \cdot 2025$ отрезков.



Несложно заметить, что граница любого клетчатого прямоугольника содержит не более двух отмеченных отрезков. Тогда меньше чем за 2025 ходов перекрасить все отмеченные отрезки, а тем более и всю сетку, не получится.

Приведём пример на 2025 ходов. Возьмём 1012 прямоугольников, ограничивающих строки с чётными номерами (вторую, четвёртую и так далее), и 1012 прямоугольников, ограничивающих столбцы с чётными номерами. Последним ходом перекрасим границу всей доски.



4. Найдите все пары натуральных чисел m и n , не равных одновременно единице, для которых $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$.

Ответ: пара (m, n) может быть равна $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$.

Решение. Обозначим $k = mn - 1$. Тогда

$$0 \equiv n^3 + 1 \equiv n^3 + mn \equiv n^3 + m^2 n^2 \pmod{k}.$$

Поскольку k и n взаимно просты, делимость $n^3 + mn$ на k равносильна делимости $n^2 + m$ на k , и аналогично делимость $n^3 + m^2 n^2$ на k равносильна делимости $m^2 + n$ на k . Любая из этих делимостей также равносильна делимости из условия, поэтому если пара (m, n) нам подходит, то пара (n, m) тоже подойдёт. Потому можем без ограничения общности положить $m \geq n$. Из $(n^2 + m) : (mn - 1)$ вытекают два случая.

Случай 1. $n^2 + m \geq 2(mn - 1)$. Тогда имеем следующую оценку

$$2mn - 2 \leq n^2 + m \leq mn + m,$$

откуда $m(n-1) \leq 2$, и, стало быть, $n = 1$ или $m = 2, n = 2$ (эта пара в самом деле подходит). В случае $n = 1$ число $m-1$ должно быть делителем $2 = n^3 + 1$, что даёт $m = 2$ или $m = 3$.

Случай 2. $n^2 + m = mn - 1$, что равносильно $n^2 + 1 = m(n-1)$. Если $m \geq n+2$, то

$$n^2 + 1 = m(n-1) \geq (n+2)(n-1) = n^2 + n - 2.$$

Закключаем $n \leq 3$, и остаётся для каждого из трёх значений найти возможные m из соотношения $m(n-1) = n^2 + 1$.

Если же $m = n$ или $m = n+1$, то соотношение $n^2 + m = mn - 1$ превращается в линейное уравнение на n , из которого находятся подходящие значения.

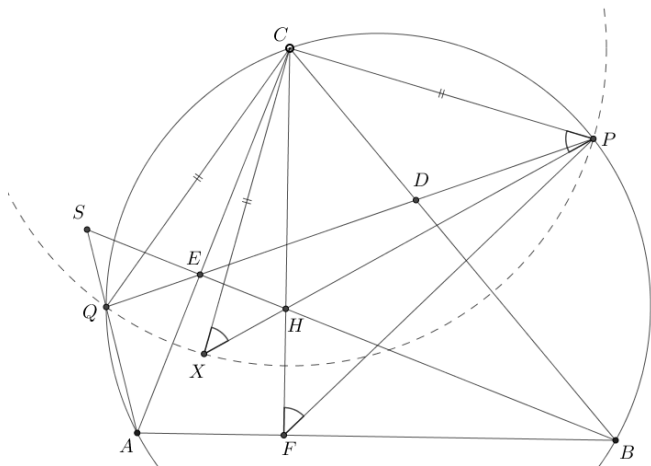
5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая DE пересекает описанную окружность треугольника в точках P и Q , причём P лежит на меньшей дуге BC , а Q лежит на меньшей дуге AC . Наконец, AQ и BH пересекаются в точке S . Докажите, что описанные окружности треугольников BPE и QHS и прямая PH пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим F — основание высоты из C , X — вторая точка пересечения PH с окружностью (BPE) . Будем доказывать, что X лежит на окружности (QSH) .

Пусть O — центр окружности (ABC) . Нетрудно заметить, что $CO \perp DE$. В самом деле,

$$\angle DCO = \angle ACF = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \angle EDC.$$

Из этой перпендикулярности, однако, следует, что $CQ = CP$.



Легко видеть, что $HX \cdot HP = HE \cdot HB = HC \cdot HF$. Здесь первое равенство следует из вписанности четырёхугольника $BPEX$, а второе — из вписанности $BCEF$. Вместе, однако, они означают вписанность $FXCP$, из которой получаем $\angle CXP = \angle CFP$.

Раз $CQ = CP$, равны соответствующие дуги и опирающиеся на них углы CPQ и CBP . Из этого равенства углов следует, что CP касается окружности (BDP) , и потому $CP^2 = CD \cdot CB$. Последнее произведение в силу вписанности четырёхугольника $BFHD$ равно $CH \cdot CF$. А из равенства $CP^2 = CH \cdot CF$ следует касание CP и окружности PHF , которое превращается в равенство углов $\angle CFP = \angle CPH$.

Итого, имеем

$$\angle CXP = \angle CFP = \angle CPH = \angle CPX.$$

Таким образом, треугольник CXP равнобедренный, и $CX = CP = CQ$. Тогда в окружности (QXP) угол QCP — центральный, а угол QXP — вписанный, опирающийся на дополнительную дугу. С учётом этого получаем

$$\begin{aligned} \angle QXH = \angle QXP &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle QCP = 90^\circ + \angle CPQ = 90^\circ + \angle CAQ = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \angle EAS) = 180^\circ - \angle HSQ. \end{aligned}$$

Это и означает требуемую вписанность $QSHX$.