

Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. По кругу стоят 2025 карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Известно, что произведение чисел на любых двух соседних карточках является точным кубом. Докажите, что на каждой карточке написан точный куб.

Решение. Пусть по кругу написаны числа $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$. По условию числа $a_i a_{i+1}$ являются точными кубами. Так как произведение точных кубов является точным кубом, то число $(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{2024} a_{2025})(a_{2025} a_1) = (a_1 a_2 \dots a_{2025})^2$ является точным кубом. Так как x^2 является точным кубом тогда и только тогда, когда x является точным кубом, то $a_1 a_2 \dots a_{2025}$ также является точным кубом. Наконец, частное двух точных кубов является точным кубом, поэтому

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_{2025}}{(a_2 a_3)(a_4 a_5) \dots (a_{2024} a_{2025})} = a_1$$

является точным кубом. Проводя аналогичные рассуждения для остальных чисел, получим, что все числа являются точными кубами. $\square$

Критерии

- 2 б. Задача решена в частном случае, когда все числа, записанные на карточках, являются степенями одного и того же числа.

Задача 2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с большим основанием AB . Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , а J — центр вневписанной окружности треугольника ACD , касающейся стороны AD . Докажите, что $IJ \parallel AB$.

Решение. Пусть K — центр окружности, вписанной в треугольник ABD . Поскольку треугольники ABC и ABD симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB , точки I и K также симметричны относительно него, а значит $IK \parallel AB$. Пусть $\angle ABD = \angle ACD = \varphi$. Тогда $\angle AKD = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$, $\angle DJA = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, откуда вытекает, что четырёхугольник $AKDJ$ — вписанный. Прямые AK и DJ параллельны как биссектрисы смежных углов. Получаем, что $\angle AKJ = \angle ADJ = \angle DAK = \angle KAB$, что завершает доказательство. $\square$

Критерии

- 2 б. Отмечен центр K вписанной окружности треугольника ABD , и задача сведена к доказательству параллельности KJ и AB .

Задача 3. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c) , для которых каждое из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ является факториалом некоторого натурального числа.

Решение. **Ответ:** $(1, 1, m! - 1)$ и их перестановки.

Обозначим $ab + 1 = k!$, $bc + 1 = l!$, $ca + 1 = m!$. Поскольку числа a, b, c — натуральные, легко видеть, что $k, l, m > 1$.

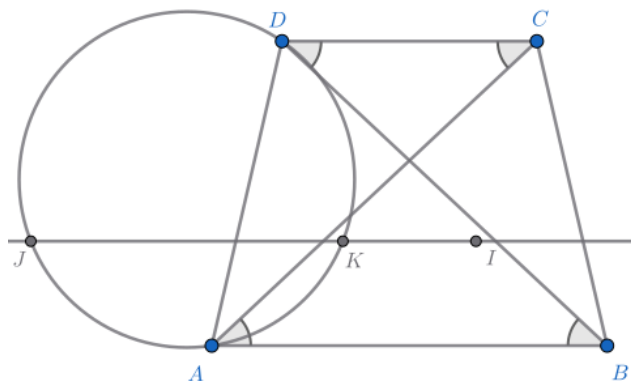


Рис. 1: К задаче 2.

Пусть $k, l, m > 2$. Тогда $k! \not\equiv 3$, $l! \not\equiv 3$ и $m! \not\equiv 3$. Рассмотрим остатки при делении на 3 чисел a, b, c . Если $a \equiv 3$, то $ab + 1 = k! \not\equiv 3$, противоречие. Аналогично для чисел b, c . Следовательно, a, b, c дают остатки 1 и 2 при делении на 3. Тогда среди a, b, c найдутся два числа, дающих одинаковый остаток при делении на 3. Не умаляя общности, считаем, что это a и b . Но тогда $ab + 1 \equiv a^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$, противоречие.

Следовательно, среди k, l, m есть число, равное 2. Не умаляя общности, $k = 2$. Тогда $a = b = 1$, и $c = l! - 1$. Нетрудно видеть, что такие тройки подходят. $\square$

Критерии

- 0 б. Замечено, что тройки, отличающиеся перестановкой от тройки вида $(1, 1, m! - 1)$, $m \in \mathbb{N}$, подходят, дальнейших продвижений нет.

Задача 4. В кубе $7 \times 7 \times 7$ единичные кубики раскрашены в белый, чёрный и серый цвета так, что для любых двух цветов количества кубиков этих двух цветов различны. При этом нашлось N параллельных рядов из 7 кубиков, в каждом из которых белых кубиков больше чем серых и чем чёрных. Аналогично, нашлось N параллельных рядов из 7 кубиков, в каждом из которых серых кубиков больше чем белых и чем чёрных, а также нашлось N параллельных рядов из 7 кубиков, в каждом из которых чёрных кубиков больше чем белых и чем серых. При каком наибольшем N это возможно?

Решение. **Ответ:** при $N = 37$.

Оценка. Не умаляя общности, пусть в чёрный цвет покрашено наименьшее количество кубиков. Покажем, что в чёрный цвет покрашено не более 113 кубиков. Действительно, если кубиков чёрного цвета не менее 114, то кубиков каждого из оставшихся цветов не менее 115, итого не менее $114 + 115 + 115 = 344 > 7^3$. Противоречие.

Чтобы в ряду чёрных кубиков было больше, чем серых и чем белых, в нём должно быть хотя бы 3 чёрных кубика. Тогда так по условию есть хотя бы N таких рядов, то всего чёрных кубиков не меньше $3N$. С другой стороны, по доказанному чёрных кубиков не больше 133, откуда $3N \leq 133$, и $N \leq 37$.

Пример. Введём координаты так, что все кубики имели координаты $(x, y, z), 1 \leq x, y, z \leq 7$. Покрасим куб $6 \times 6 \times 6$ с кубиками $(x, y, z) \mid 1 \leq x, y, z \leq 6$ таким образом, чтобы в каждом ряду было по два чёрных, серых и белых кубика. Для этого, например, покрасим в чёрный кубики (x, y, z) , для которых $x + y + z : 3$, в серый — кубики, для которых $x + y + z + 1 : 3$, в белый — кубики, для которых $x + y + z - 1 : 3$. Далее, покрасим в чёрный кубики вида $(x, y, 7), 1 \leq x, y \leq 6$, в серый — кубики вида $(x, 7, z), 1 \leq x, z \leq 6$, в белый — кубики вида $(7, y, z), 1 \leq y, z \leq 6$. Наконец, покрасим в чёрный 5 кубиков $(7, 7, z), 1 \leq z \leq 5$, в серый — 6 кубиков $(7, y, 7), 1 \leq y \leq 6$, а оставшиеся 8 кубиков покрасим в белый. Тогда в каждом ряду вида $(x, y, 1) - (x, y, 7)$ для $1 \leq x, y \leq 6$ по 3 чёрных, 2 серых и 2 белых кубика, а также в ряду $(7, 7, 1) - (7, 7, 7)$ 5 чёрных и 2 белых кубика, поэтому мы можем выбрать $6 \times 6 + 1 = 37$ подходящих рядов. Для остальных цветов, аналогично, мы также можем выбрать 37 подходящих рядов. Наконец, клеток чёрного цвета ровно 113, серного — 114, белого — 116, поэтому для любых двух цветов количества кубиков этих двух цветов различны. $\square$

Критерии

3 б. В работе верно доказана оценка.

3 б. В работе приведён и полностью обоснован верный пример.

Задача 5. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC , D — основание высоты, проведённой из вершины A , а ω — окружность, построенная на AH , как на диаметре. Окружность ω_1 проходит через точки B и D и касается ω внутренним образом в точке R . Окружность ω_2 проходит через точки C и D и касается ω внутренним образом в точке L . Докажите, что прямые CL и BR пересекаются на AD .

Решение. Первый способ. Пусть O — середина отрезка AH . Иначе говоря, O — центр окружности ω . По теореме о радикальных осях, применённой к окружностям ω, ω_1 и окружности, построенной на стороне AB , как на диаметре (см. рис. 2), получаем, что касательная к ω , восстановленная в точке R , проходит через C . Тогда $\angle ORC = 90^\circ = \angle ODC$, поэтому четырёхугольник $ORCD$ — вписанный. Значит, $\angle DOC = \angle DRC = \angle RBC$, где последнее равенство вытекает из подобия треугольников DRC и RBC по двум сторонам и общему углу. Тогда $\angle RBC + \angle OCB = \angle RBC + 90^\circ - \angle DOC = 90^\circ$, то есть $CO \perp BR$. Проводя аналогичное рассуждение для ω, ω_2 и окружности, построенной на стороне AC , как на диаметре, получаем, что $BO \perp CL$. Значит, BR и CL содержат высоты треугольника BOC , то есть пересекаются на AD , что и требовалось доказать.

Второй способ. Рассмотрим композицию φ инверсии относительно окружности с центром в точке D радиуса $\sqrt{DH \cdot DA}$ и осевой симметрии относительно прямой AD . Треугольники BDA и HDC подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{BD}{DA} = \frac{HD}{DC} \iff DH \cdot DA = BD \cdot DC,$$

откуда следует, что преобразование φ меняет местами точки в парах A и H , B и C . Поскольку A и H поменялись местами, окружность ω перешла в себя. Окружность ω_1 проходит через центр инверсии D , поэтому переходит в касательную к ω , проходящую

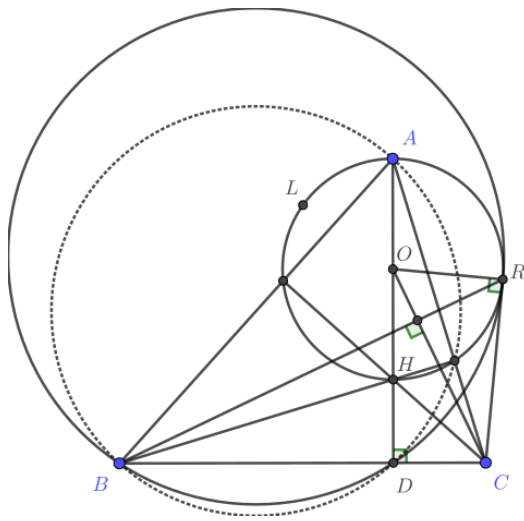


Рис. 2: К первому решению задачи 5.

через C . Поскольку ω и ω_1 касались внутренним образом, ω_1 перейдёт в ту касательную, относительно которой точки A и B лежат в разных полуплоскостях — обозначим её CR' , где $R' = \varphi(R)$. Аналогично ω_2 перейдёт в касательную BL' к ω , где $L' = \varphi(L)$. Заметим, что описанные окружности треугольников CDR' и BDL' пересекаются в центре O окружности ω , так как $\angle OR'C = 90^\circ = \angle ODC$ и $\angle OL'B = 90^\circ = \angle ODB$. Значит, прообразы этих окружностей — прямые CL и BR — пересекались на высоте AD , что и требовалось доказать. $\square$

Задача 6. Докажите, что для любых положительных a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{ab}{c^2 + d^2} + \frac{bc}{d^2 + a^2} + \frac{cd}{a^2 + b^2} + \frac{da}{b^2 + c^2} \geq \frac{(a + c)(b + d)}{ac + bd}.$$

Решение. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца:

$$\left(\frac{ab}{c^2 + d^2} + \frac{bc}{d^2 + a^2} + \frac{cd}{a^2 + b^2} + \frac{da}{b^2 + c^2} \right) \cdot (ab(c^2 + d^2) + bc(d^2 + a^2) + cd(a^2 + b^2) + da(b^2 + c^2)) \geq (ab + bc + cd + da)^2.$$

Далее преобразуем полученные выражения:

$$ab(c^2 + d^2) + bc(d^2 + a^2) + cd(a^2 + b^2) + da(b^2 + c^2) = (a + c)(b + d)(ac + bd)$$

и

$$(ab + bc + cd + da)^2 = (a + c)^2(b + d)^2.$$

Разделив обе части полученного неравенства на $(a + c)(b + d)(ac + bd)$, получим требуемое. $\square$