

Диагностическая работа. Повторный очный этап.

Задача 1. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) , для которых

$$p + q^2 = r^4.$$

Решение. **Ответ:** $(p, q, r) = (7, 3, 2)$.

Первое решение. Перепишем равенство в виде

$$p = (r^2 - q)(r^2 + q).$$

Оба множителя — натуральные числа: из $r^4 > q^2$ следует $r^2 > q$. Второй множитель больше первого. Поскольку p простое, получаем $r^2 - q = 1$. Следовательно,

$$q = r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1).$$

Число q также простое, поэтому $r - 1 = 1$. Значит, $r = 2$, $q = 3$ и $p = 7$. Подстановка показывает, что эта тройка подходит.

Второе решение. Предположим, что r нечётно. Тогда число r^4 нечётно, поэтому p и q имеют разную чётность. Единственное чётное простое число — 2, так что ровно одно из чисел p, q равно 2.

Если $p = 2$, то q нечётно. Квадрат любого нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 4. Поэтому $p + q^2$ даёт остаток 3, а r^4 — остаток 1. Получили противоречие.

Если $q = 2$, то

$$p = r^4 - 4 = (r^2 - 2)(r^2 + 2).$$

Поскольку $r \geq 3$, оба множителя больше 1, что противоречит простоте p .

Следовательно, r чётно, то есть $r = 2$. Теперь $p + q^2 = 16$, откуда $q < 4$. Простое число q равно 2 или 3. При $q = 2$ получаем $p = 12$, что не подходит, а при $q = 3$ получаем $p = 7$. Таким образом, единственная подходящая тройка — $(7, 3, 2)$. $\square$

Критерии

2 б. Получено разложение $p = (r^2 - q)(r^2 + q)$.

4 б. Обосновано, что $q = r^2 - 1$.

0 б. Только найдена подходящая тройка.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и AC . Биссектрисы углов ABC и BCA пересекают прямую MN в точках P и Q соответственно. Докажите, что касательная в точке P к описанной окружности треугольника AMP и касательная в точке Q к описанной окружности треугольника ANQ пересекаются на прямой BC .

Решение. Пусть D — основание высоты треугольника ABC , проведённой из вершины A . Докажем, что обе касательные проходят через D .

Так как $MN \parallel BC$ и BP — биссектриса угла ABC , то

$$\angle MPB = \angle PBC = \angle ABP = \angle MBP.$$

Следовательно, $MP = MB = MA$. Кроме того, $MD = MA$, поскольку M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника ADB . Таким образом, точки A, B, P, D лежат на одной окружности с центром M .

Из параллельности PM и BC и вписанности четырёхугольника $APDB$ получаем

$$\angle MPD = \angle PDC = \angle PAB = \angle PAM.$$

По признаку касательной прямая DP касается описанной окружности треугольника AMP в точке P .

Аналогично, рассматривая прямоугольный треугольник ADC и окружность с центром N , получаем, что DQ касается описанной окружности треугольника ANQ в точке Q . При этом $MP + NQ = (AB + AC)/2 > BC/2 = MN$, поэтому $P \neq Q$. Следовательно, две касательные пересекаются в точке D , лежащей на BC .

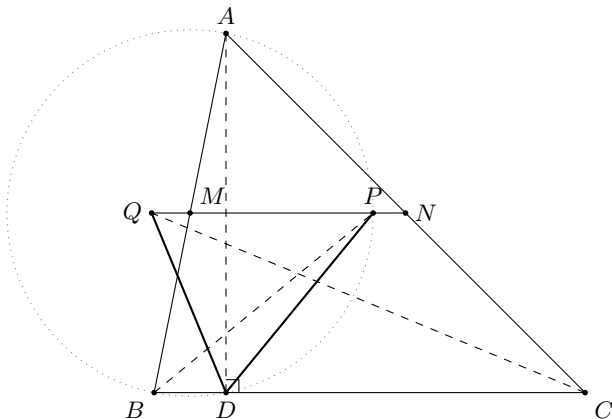


Рис. 1: К задаче 2.

□

Критерии

2 б. Доказано, что $MP = MB = MA$.

4 б. Введено основание высоты D и доказано, что A, B, P, D лежат на одной окружности с центром M .

5 б. Доказано, что одна из двух касательных проходит через D .

Задача 3. Дано конечное множество S натуральных чисел. Известно, что существует ровно 2023 упорядоченные пары (x, y) , где $x, y \in S$, для которых xu является точным

квадратом. При этом допускается $x = y$. Докажите, что в S можно выбрать четыре различных числа так, чтобы произведение любых двух из них не являлось точным квадратом.

Решение. Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде du^2 , где u — натуральное число, а d не делится на квадрат никакого простого числа. Действительно, в разложении на простые множители достаточно выделить из каждого показателя его чётную часть. Число d будем называть бесквадратной частью исходного числа.

Произведение двух натуральных чисел является точным квадратом тогда и только тогда, когда их бесквадратные части совпадают: это равносильно совпадению чётностей показателей каждого простого множителя.

Разобьём S на группы с одинаковой бесквадратной частью. Пусть в них $n_1, n_2, \dots, n_k$ чисел. Группа из n_i чисел даёт ровно n_i^2 подходящих упорядоченных пар, включая пары (x, x) . Поэтому

$$n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2 = 2023.$$

Покажем, что $k \geq 4$. Иначе, дополнив список размеров групп нулями, мы представили бы 2023 как сумму трёх квадратов. Квадрат целого числа даёт при делении на 8 один из остатков 0, 1, 4. Если среди трёх остатков нет четвёрок, их сумма не превосходит 3. При одной четвёрке сумма равна 4, 5 или 6; при двух — 8 или 9; при трёх — 12. Ни в одном случае не получается остаток 7, тогда как $2023 \equiv 7 \pmod{8}$.

Итак, групп не меньше четырёх. Выберем по одному числу из любых четырёх групп. Их бесквадратные части попарно различны, поэтому выбранные числа удовлетворяют требованию задачи. $\square$

Критерии

- 2 б. Обосновано разбиение на группы, внутри которых произведения являются квадратами, а между группами — не являются.
- 4 б. Получено равенство $\sum n_i^2 = 2023$ и задача сведена к невозможности представить 2023 суммой не более трёх квадратов.
- 1 б. Только доказано, что 2023 не является суммой трёх квадратов, но связь с исходной задачей не установлена.

Задача 4. Все клетки доски 100×100 белые. За один ход разрешается выбрать 99 клеток одной строки или одного столбца и поменять цвет каждой из них на противоположный. За какое наименьшее число ходов можно получить шахматную раскраску доски?

Решение. **Ответ:** За 100 ходов.

Оценка. В шахматной раскраске все клетки каждой из двух диагоналей имеют один цвет. Так как размер доски чётный, одна из этих диагоналей чёрная, а другая белая. Рассмотрим ту диагональ, которая в конечной раскраске будет чёрной. В каждой строке и каждом столбце лежит ровно одна её клетка, поэтому за один ход можно

перекрасить не более одной клетки этой диагонали. Каждая из её 100 клеток первоначально белая и должна хотя бы раз изменить цвет. Следовательно, требуется не менее 100 ходов.

Пример. Занумеруем строки сверху вниз, а столбцы слева направо числами от 1 до 100. Сначала по одному разу выберем каждую строку с чётным номером и перекрасим все её клетки, кроме клетки на главной диагонали. Затем так же поступим с каждым столбцом с чётным номером: перекрасим все его клетки, кроме клетки на главной диагонали. Всего сделано $50 + 50 = 100$ допустимых ходов.

Проверим результат. Клетки главной диагонали не перекрашивались и остались белыми. Для клетки вне главной диагонали возможны три случая:

- если номера строки и столбца нечётные, клетка не перекрашивалась;
- если оба номера чётные, клетка перекрашивалась дважды;
- если номера разной чётности, клетка перекрашивалась ровно один раз.

Таким образом, клетка стала чёрной тогда и только тогда, когда сумма номеров её строки и столбца нечётна. Это шахматная раскраска. Оценка достигнута, поэтому ответ равен 100. $\square$

Критерии

3 б. Доказано, что нужно не менее 100 ходов.

4 б. Построен пример на 100 ходов.

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC , где $AC \neq BC$, точка H — точка пересечения высот, M — середина стороны AB , а D и E — основания высот, проведённых из вершин A и B соответственно. Докажите, что прямые AB , DE и прямая, проходящая через C перпендикулярно MH , пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим через Γ описанную окружность треугольника ABC , а через C' — точку, диаметрально противоположную C на Γ . Так как $AC' \perp BC$ и $BC' \perp AC$, получаем $AC' \parallel BH$ и $BC' \parallel AH$. Следовательно, $AHBC'$ — параллелограмм. Его диагонали AB и HC' делятся точкой пересечения пополам, поэтому M , H , C' коллинеарны.

Пусть прямая MH вторично пересекает Γ в точке T . Поскольку CC' — диаметр, имеем $CT \perp C'T$, то есть $CT \perp MH$.

Рассмотрим ещё две окружности:

ω_1 — с диаметром AB , ω_2 — с диаметром CH .

Точки D и E принадлежат обеим окружностям, поскольку

$$\angle ADB = \angle AEB = \angle CDH = \angle CEH = 90^\circ.$$

Кроме того, $T \in \omega_2$, так как $CT \perp HT$. Таким образом, радикальные оси пар окружностей (Γ, ω_1) , (ω_1, ω_2) и (Γ, ω_2) — это соответственно AB , DE и CT .

Убедимся, что AB и DE не параллельны. Если бы $DE \parallel AB$, то из подобия треугольников CDE и CBA следовало бы $CD/CB = CE/CA$. Но из прямоугольных треугольников ACD и BCE имеем $CD = CA \cos \angle ACB$ и $CE = CB \cos \angle ACB$. Так как угол ACB острый, получаем $CA^2 = CB^2$, что противоречит условию.

По теореме о радикальных осях три найденные прямые проходят через одну точку. Прямая CT и есть прямая, проходящая через C перпендикулярно MH , поэтому утверждение доказано.

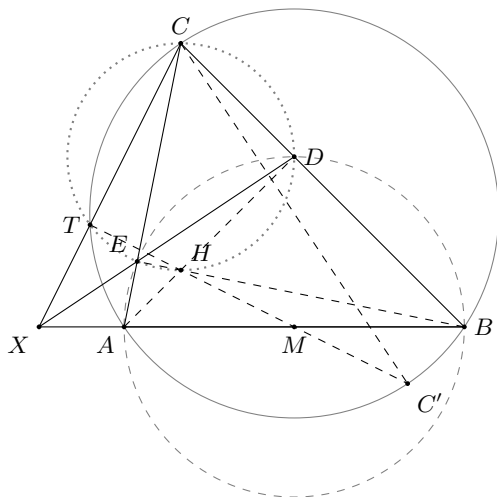


Рис. 2: К задаче 5.

□

Критерии

- 2 б. Доказано, что M, H, C' коллинеарны, где C' диаметрально противоположна C .
- 4 б. Дополнительно построена точка $T \in \Gamma$ и доказано, что $CT \perp MH$ и C, D, E, H, T лежат на одной окружности.
- 5 б. Выделены три нужные окружности и их радикальные оси, но применение теоремы о радикальных осях не завершено.

Задача 6. Докажите, что для любых попарно различных неотрицательных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$(a + b + c) \left(\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} \right) > 4.$$

Решение. Выражение симметрично относительно a, b, c , поэтому можно считать, что c — наименьшее из этих чисел. Положим $x = a - c$ и $y = b - c$. Тогда $x, y > 0$ и $x \neq y$, а левая часть имеет вид

$$(x + y + 3c) \left(\frac{x + c}{y^2} + \frac{y + c}{x^2} + \frac{c}{(x - y)^2} \right).$$

Так как $c \geq 0$, это выражение не меньше

$$(x+y) \left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \right) = \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{x^2y^2}.$$

Остаётся воспользоваться тождеством

$$(x+y)(x^3+y^3) - 4x^2y^2 = (x-y)^2(x^2+3xy+y^2) > 0.$$

Строгость следует из $x \neq y$ и $x, y > 0$. Следовательно, исходное выражение строго больше 4. □

Критерии