

- 1.1 Про положительные числа a, b, c, d известно, что $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3}{4}$ и $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} = 15$.
Найдите $ac + bd - ad - bc$.

Ответ: 108.

Решение. Т.к. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3}{4}$, переобозначим $a = 3x$, $c = 4x$, $b = 3y$, $d = 4y$. Условие $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} = 15$ переписывается в виде $5x - 5y = 15$, а найти нужно $ac + bd - ad - bc = 12x^2 + 12y^2 - 12xy - 12xy = 12(x - y)^2 = 12 \cdot 3^2 = 108$.

- 1.2 Про положительные числа a, b, c, d известно, что $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3}{4}$ и $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} = 25$.
Найдите $ac + bd - ad - bc$.

Ответ: 300.

- 1.3 Про положительные числа a, b, c, d известно, что $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3}{4}$ и $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} = 35$.
Найдите $ac + bd - ad - bc$.

Ответ: 588.

- 1.4 Про положительные числа a, b, c, d известно, что $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3}{4}$ и $\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + d^2} = 45$.
Найдите $ac + bd - ad - bc$.

Ответ: 972.

- 2.1 Даны пять целых чисел от 0 до 100 включительно. Какова наибольшая возможная разность между медианой и средним арифметическим этого набора?

Ответ: 40.

Решение. Упорядочим эти числа $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Тогда нас спрашивают про выражение $c - \frac{a + b + c + d + e}{5} = \frac{4c - a - b - d - e}{5}$. Оценим это выражение: $\frac{4c - a - b - d - e}{5} \leq \frac{4c - c - c - 0 - 0}{5} = \frac{2c}{5} \leq \frac{2 \cdot 100}{5} = 40$. Равенство достигается при $a = b = 0$, $c = d = e = 100$.

Примечание: похожим образом несложно проверить, что наибольшее возможное значение разности между средним арифметическим и медианой тоже равно 40.

- 2.2 Даны пять целых чисел от 0 до 120 включительно. Какова наибольшая возможная разность между медианой и средним арифметическим этого набора?

Ответ: 48.

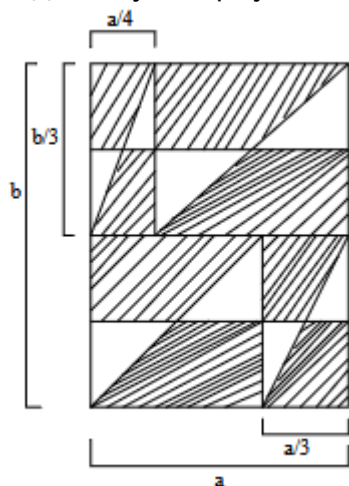
- 2.1 Даны пять целых чисел от 0 до 140 включительно. Какова наибольшая возможная разность между медианой и средним арифметическим этого набора?

Ответ: 56.

- 2.1 Даны пять целых чисел от 0 до 180 включительно. Какова наибольшая возможная разность между медианой и средним арифметическим этого набора?

Ответ: 72.

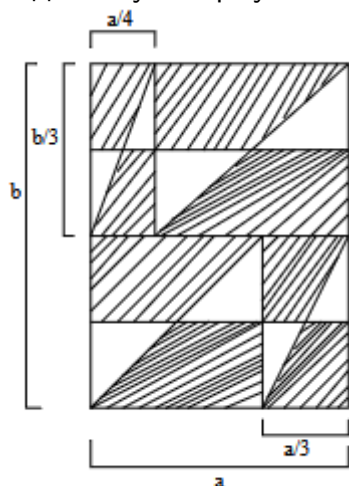
3.1 Найдите суммарную площадь заштрихованных частей, если $a = 20, b = 25$.



Ответ: 375.

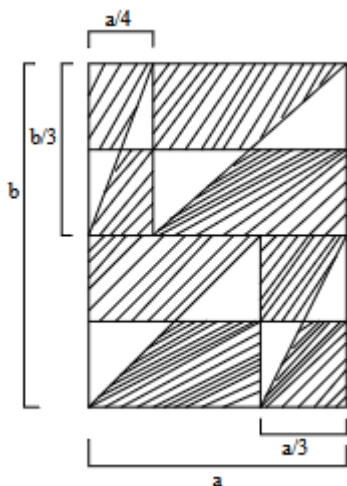
Решение. Заметим, что в прямоугольнике со сторонами x, y сумма площадей треугольников, образованных при проведении средней линии и диагонали, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4}$, а значит, сумма площадей трапеций, образовавшихся при проведении этих линий, равна $xy - \frac{xy}{4} = \frac{3}{4}xy$. Применим этот факт для прямоугольников $\frac{a}{4} \times \frac{b}{3}, \frac{3a}{4} \times \frac{b}{3}, \frac{2a}{3} \times \frac{2b}{3}$ и $\frac{a}{3} \times \frac{2b}{3}$, получим, что искомая площадь равна $\frac{3}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{b}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{b}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2b}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3} = \frac{3}{4}ab = 375$.

3.2 Найдите суммарную площадь заштрихованных частей, если $a = 16, b = 20$.



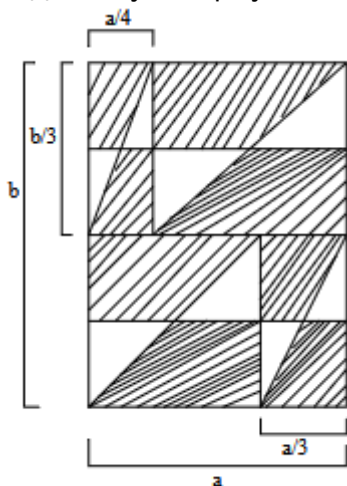
Ответ: 240.

3.3 Найдите суммарную площадь заштрихованных частей, если $a = 12, b = 30$.



Ответ: 270.

3.4 Найдите суммарную площадь заштрихованных частей, если $a = 24$, $b = 35$.



Ответ: 630.

4.1 Пусть $f(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n . Для скольких натуральных n , меньших 1.000.006, выполняется равенство $f(n) = f(n + 1)$?

Ответ: 250.002.

Решение. Если число n — чётно, то его двоичная запись заканчивается на 0, а двоичная запись числа $n + 1$ отличается только заменой 0 в конце на 1. В этом случае равенство $f(n) = f(n + 1)$ невозможно. Если число n нечётно и заканчивается на $0\underbrace{1\dots1}_k$, то $n + 1$ заканчивается на $1\underbrace{0\dots0}_k$, остальные цифры не меняются. Чтобы количество единиц сохранилось, необходимо и достаточно, чтобы k было равно 1. Это происходит в случае, когда число n заканчивается на 01, т.е. имеет вид $4k + 1$. Таких чисел, меньших 1.000.006, ровно 250.002.

4.2 Пусть $f(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n . Для скольких натуральных n , меньших 2.000.002, выполняется равенство $f(n) = f(n + 1)$?

Ответ: 500.001.

4.3 Пусть $f(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n . Для скольких натуральных n , меньших 3.000.014, выполняется равенство $f(n) = f(n + 1)$?

Ответ: 750.004.

4.4 Пусть $f(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n . Для скольких натуральных n , меньших 4.000.010, выполняется равенство $f(n) = f(n + 1)$?

Ответ: 1.000.003.

5.1 На доске написано несколько не обязательно различных натуральных чисел с суммой 4000. Пусть n_i — количество чисел, равных i . Найдите наибольшее возможное значение выражения $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots + 3999n_{4000}$, если известно, что чисел не менее 37 и не более 73.

Ответ: 3963.

Решение. Заметим, что сумма всех чисел равна $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + 4000n_{4000}$. Это можно понять, например, рассмотрев диаграмму Юнга нашего набора чисел. Тогда $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots + 3999n_{4000} = (n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + 4000n_{4000}) - (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{4000}) = \text{сумма всех чисел} - \text{количество чисел} \leq 4000 - 37 = 3963$. Равенство достигается, например, для набора из 36 чисел 108 и одного числа 112.

5.2 На доске написано несколько не обязательно различных натуральных чисел с суммой 5000. Пусть n_i — количество чисел, равных i . Найдите наибольшее возможное значение выражения $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots + 4999n_{5000}$, если известно, что чисел не менее 42 и не более 81.

Ответ: 4958.

5.3 На доске написано несколько не обязательно различных натуральных чисел с суммой 6000. Пусть n_i — количество чисел, равных i . Найдите наибольшее возможное значение выражения $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots + 2025n_{2026}$, если известно, что чисел не менее 21 и не более 68.

Ответ: 5979.

5.4 На доске написано несколько не обязательно различных натуральных чисел с суммой 7000. Пусть n_i — количество чисел, равных i . Найдите наибольшее возможное значение выражения $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots + 2025n_{2026}$, если известно, что чисел не менее 32 и не более 75.

Ответ: 6968.

6.1 Для скольких натуральных $a \leq 2210$ существуют целые b, c такие, что оба числа $a + 23b + 15c - 2$ и $2a + 5b + 14c - 8$ делятся на 26?

Ответ: 170.

Решение. Раз эти числа делятся на 26, то они делятся и на 13. Перепишем эти делимости в виде сравнений: $a + 10b + 2c \equiv 2 \pmod{13}$ и $2a + 5b + c \equiv 8 \pmod{13}$. Домножим второе сравнение на 2 и вычтем из него первое сравнение, получаем $3a \equiv 1 \pmod{13}$. Это возможно, только если $a \equiv 9 \pmod{13}$. Заметим, что любое число такое a подходит. Если $a \equiv 9 \pmod{13}$ и нечётно, то оно имеет вид $26k + 9$. Тогда можно взять $b = 0$ и $c = 3$.

Если же $a \equiv 9 \pmod{13}$ и чётно, то оно имеет вид $26k + 22$ и можно взять $b = 0$ и $c = 16$. Тогда количество подходящих чисел равно $\frac{2210}{13} = 170$.

- 6.2 Для скольких натуральных $a \leq 1170$ существуют целые b, c такие, что оба числа $a + 23b + 15c - 2$ и $2a + 5b + 14c - 8$ делятся на 26?

Ответ: 90.

- 6.3 Для скольких натуральных $a \leq 1950$ существуют целые b, c такие, что оба числа $a + 23b + 15c - 2$ и $2a + 5b + 14c - 8$ делятся на 26?

Ответ: 150.

- 6.4 Для скольких натуральных $a \leq 1690$ существуют целые b, c такие, что оба числа $a + 23b + 15c - 2$ и $2a + 5b + 14c - 8$ делятся на 26?

Ответ: 130.

- 7.1 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором диагональ AC — биссектриса угла BAD . $\angle BAD = 40^\circ$, $\angle ABD = 130^\circ$. Точка E на отрезке AD такова, что $BC = CD = DE$. Найдите угол ACE .

Ответ: 55.

Решение. Т.к. $BC = CD$, то точка D лежит на серединном перпендикуляре к стороне BD треугольника ABD . Тогда точка D — это точка пересечения биссектрисы и серпера в треугольнике ABD , а значит, лежит на его описанной окружности. Значит, $ABCD$ — вписанный. Теперь посчитаем углы. $\sphericalangle AD = 130^\circ$, $\sphericalangle BC = \sphericalangle CD = 40^\circ$, тогда $\sphericalangle AB = 20^\circ$. Далее, $\angle CDA = \frac{\sphericalangle AB + \sphericalangle BC}{2} = 30^\circ$. Треугольник CED — равнобедренный, тогда $\angle ECD = 75^\circ$. $\angle BCA = \frac{\sphericalangle AB}{2} = 10^\circ$, $\angle BCD = \frac{\sphericalangle AB + \sphericalangle AD}{2} = 140^\circ$. $\angle ACE = \angle BCD - \angle BCA - \angle ECD = 140^\circ - 10^\circ - 75^\circ = 55^\circ$.

- 7.2 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором диагональ AC — биссектриса угла BAD . $\angle BAD = 36^\circ$, $\angle ABD = 132^\circ$. Точка E на отрезке AD такова, что $BC = CD = DE$. Найдите угол ACE .

Ответ: 57.

- 7.3 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором диагональ AC — биссектриса угла BAD . $\angle BAD = 32^\circ$, $\angle ABD = 134^\circ$. Точка E на отрезке AD такова, что $BC = CD = DE$. Найдите угол ACE .

Ответ: 59.

- 7.4 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором диагональ AC — биссектриса угла BAD . $\angle BAD = 44^\circ$, $\angle ABD = 128^\circ$. Точка E на отрезке AD такова, что $BC = CD = DE$. Найдите угол ACE .

Ответ: 53.

- 8.1 В правительстве Тридевятого государства 100 сенаторов, каждый из которых имеет по 4 помощника. Сенаторы и помощники работают в комиссиях. Комиссия может состоять

из 5 сенаторов, или 4 сенаторов и 4 помощников, или 2 сенаторов и 12 помощников. Каждый сенатор работает в 5 комиссиях, а каждый помощник работает в 3 комиссиях. Сколько всего комиссий?

Ответ: 160.

Решение. Напишем на каждом сенаторе число 4, а на каждом помощнике — число 1. Сумма чисел на членах каждой комиссии равна $5 \cdot 4 = 4 \cdot 4 + 4 = 2 \cdot 4 + 12 = 20$ и одинакова независимо от состава комиссии. Посчитаем сумму всех чисел во всех комиссиях. Каждый сенатор при этом подсчитан по 5 раз, т.е. даёт сумму 20, а каждый помощник по 3 раза, т.е. даёт сумму 3. Тогда искомая сумма равна $20 \cdot 100 + 3 \cdot 400 = 3200$. Тогда комиссий $\frac{3200}{20} = 160$.

- 8.2 В правительстве Тридевятого государства 100 сенаторов, каждый из которых имеет по 3 помощника. Сенаторы и помощники работают в комиссиях. Комиссия может состоять из 4 сенаторов, или 3 сенаторов и 3 помощников, или 2 сенаторов и 6 помощников. Каждый сенатор работает в 6 комиссиях, а каждый помощник работает в 3 комиссиях. Сколько всего комиссий?

Ответ: 225.

- 8.3 В правительстве Тридевятого государства 100 сенаторов, каждый из которых имеет по 4 помощника. Сенаторы и помощники работают в комиссиях. Комиссия может состоять из 6 сенаторов, или 5 сенаторов и 4 помощников, или 3 сенаторов и 12 помощников. Каждый сенатор работает в 7 комиссиях, а каждый помощник работает в 5 комиссиях. Сколько всего комиссий?

Ответ: 200.

- 8.4 В правительстве Тридевятого государства 100 сенаторов, каждый из которых имеет по 3 помощника. Сенаторы и помощники работают в комиссиях. Комиссия может состоять из 5 сенаторов, или 4 сенаторов и 3 помощников, или 3 сенаторов и 6 помощников. Каждый сенатор работает в 6 комиссиях, а каждый помощник работает в 3 комиссиях. Сколько всего комиссий?

Ответ: 180.

- 9 На математическом турнире команда состоит из 5 учеников. Им нужно решить 5 задач. Для этого каждый ученик выбирает две задачи, которые он будет решать. При этом правила турнира требуют, чтобы каждая задача была выбрана ровно двумя учениками. Сколькими способами они могут разделить между собой задачи?

Ответ: 2040.

Решение. Переведём задачу на язык графов. У нас есть двудольный граф с 5 вершинами в каждой доле, а степень вершин равна 2. Сколькими способами можно разбить его на циклы? Несложно понять, что у нас всего два варианта: либо все вершины лежат в одном цикле, либо у нас два цикла — в одном 6 вершин, в другом 4. Посчитаем количество вариантов в первом случае. Выберем конкретного ученика. Количество способов выбрать, какие задачи он решил, равно C_5^2 . Для одной из задач, которые он решил есть 4 способа выбрать второго ученика, который её решил. Для этого ученика есть 3 способа выбрать вторую задачу, для этой задачи 3 способа выбрать ученика, для выбранного ученика 2

способа выбрать задачу, для задачи — 2 ученика. Дальше всё восстанавливается однозначно. Тогда всего способов $C_5^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 1440$. Для второго случая. Выбрать 3 ученика, которые будут лежать в цикле из 6 вершин — C_5^3 способов, столько же способов выбрать три задачи для этого цикла. Цикл из четырёх вершин задан однозначно. В цикле из 6 вершин выбрать 2 задачи для одного из учеников — C_3^2 способов, для одной из этих задач выбрать второго ученика, решившего её — 2 способа, а дальше всё восстанавливается однозначно. Всего $C_5^3 \cdot C_5^3 \cdot C_3^2 \cdot 2 = 600$. Тогда ответ $1440 + 600 = 2040$.

- 10.1 В турнире участвует 512 команд разной силы. Они делятся на пары, в каждой паре победителем становится команда с большей силой, и победившие команды выходят в следующий раунд. Там они снова делятся на пары и процесс повторяется, пока не останется одна команда. Алексей знает результаты всех игр турнира, но не знает, какая команда какой силой обладает. Он хочет составить список из нескольких команд так, чтобы в него точно вошли три самые сильные команды. Какое наименьшее количество команд он должен включить в список?

Ответ: 46.

Решение. Команда, которая выиграла все игры — самая сильная, и определяется однозначно. Вторая по силе команда могла проиграть только самой сильной. Всего было 9 раундов, поэтому самая сильная команда обыграла 9 других команд и любая из них может быть второй по силе. Третья по силе команда может проиграть только самой сильной или второй по силе. Команды, проигравшие самой сильной уже посчитаны, а команд, проигравших потенциальным вторым по силе командам всего $1+2+3+\dots+8$ (команда, проигравшая самой сильной в последнем раунде, до этого обыграла 8 команд; команда, проигравшая самой сильной в предпоследнем раунде, до этого обыграла 7 команд и т.д.) Итак, в списке Алексея обязательно должна быть самая сильная команда и все потенциальные вторые и третьи команды, всего $1+1+2+3+\dots+8+9=46$ команд. несложно убедиться, что без какой-то из этих команд список будет неполон.

- 10.2 В турнире участвует 256 команд разной силы. Они делятся на пары, в каждой паре победителем становится команда с большей силой, и победившие команды выходят в следующий раунд. Там они снова делятся на пары и процесс повторяется, пока не останется одна команда. Алексей знает результаты всех игр турнира, но не знает, какая команда какой силой обладает. Он хочет составить список из нескольких команд так, чтобы в него точно вошли три самые сильные команды. Какое наименьшее количество команд он должен включить в список?

Ответ: 37.

- 10.3 В турнире участвует 1024 команд разной силы. Они делятся на пары, в каждой паре победителем становится команда с большей силой, и победившие команды выходят в следующий раунд. Там они снова делятся на пары и процесс повторяется, пока не останется одна команда. Алексей знает результаты всех игр турнира, но не знает, какая команда какой силой обладает. Он хочет составить список из нескольких команд так, чтобы в него точно вошли три самые сильные команды. Какое наименьшее количество команд он должен включить в список?

Ответ: 56.

10.4 В турнире участвует 2048 команд разной силы. Они делятся на пары, в каждой паре победителем становится команда с большей силой, и победившие команды выходят в следующий раунд. Там они снова делятся на пары и процесс повторяется, пока не останется одна команда. Алексей знает результаты всех игр турнира, но не знает, какая команда какой силой обладает. Он хочет составить список из нескольких команд так, чтобы в него точно вошли три самые сильные команды. Какое наименьшее количество команд он должен включить в список?

Ответ: 67.

11 Вычислите сумму $\frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+2} + \frac{1}{5^2+3} + \frac{1}{6^2+4} + \dots$

Ответ: 13/36.

Решение. Знаменатели имеют вид $n^2 + n - 2$, поэтому надо нужно посчитать сумму $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$. Заметим, что $\frac{1}{n^2 + n - 2} = \frac{1}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right)$.

Поэтому $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \dots \right) =$
 $= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{36}$.

12.1 Пусть T — точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Пусть P — одна из точек касания внутренней касательной с окружностью ω_1 . Прямая l проходит через точку T . R — дальняя от T точка пересечения l с ω_1 , а S — ближняя к T точка пересечения l с ω_2 . Найдите $TR \cdot TS$, если радиус ω_1 равен 4, радиус ω_2 равен 6, а $O_1O_2=20$.

Ответ: 72.

Решение. Пусть S' — вторая точка пересечения прямой l с окружностью ω_1 . Гомотетия с центром T и коэффициентом $-\frac{2}{3}$ переводит ω_2 в ω_1 , O_2 в O_1 , S в S' , т.е. $\frac{TS'}{TS} = \frac{TO_1}{TO_2} = \frac{2}{3}$. Т.к. точка T лежит на O_1O_2 и $\frac{TO_1}{TO_2} = \frac{2}{3}$, то $TO_1 = 8$. Тогда $TR \cdot TS = TR \cdot \frac{3}{2}TS' = \frac{3}{2}TP^2 = \frac{3}{2}(TO_1^2 - O_1P^2) = \frac{3}{2}(8^2 - 4^2) = 72$.

12.2 Пусть T — точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Пусть P — одна из точек касания внутренней касательной с окружностью ω_1 . Прямая l проходит через точку T . R — дальняя от T точка пересечения l с ω_1 , а S — ближняя к T точка пересечения l с ω_2 . Найдите $TR \cdot TS$, если радиус ω_1 равен 6, радиус ω_2 равен 9, а $O_1O_2=25$.

Ответ: 96.

12.3 Пусть T — точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Пусть P — одна из точек касания внутренней касательной с окружностью ω_1 . Прямая l проходит через точку T . R — дальняя от T точка пересечения l с ω_1 , а S — ближняя к T точка пересечения l с ω_2 . Найдите $TR \cdot TS$, если радиус ω_1 равен 6, радиус ω_2 равен 8, а $O_1O_2=21$.

Ответ: 60.

12.4 Пусть T — точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Пусть P — одна из точек касания внутренней касательной с окружностью ω_1 . Прямая l проходит через точку T . R — дальняя от T точка пересечения l с ω_1 , а S — ближняя к T точка пересечения l с ω_2 . Найдите $TR \cdot TS$, если радиус ω_1 равен 9, радиус ω_2 равен 12, а $O_1O_2=28$.

Ответ: 84.