

Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1.1. Запись xy_b означает двузначное число с цифрами x и y в системе счисления с основанием b . Найдите сумму всех целых оснований $b > 9$, для которых число 17_b является делителем числа 97_b .

Ответ: 70

Решение. Имеем

$$17_b = b + 7, \quad 97_b = 9b + 7 = 9(b + 7) - 56.$$

Поэтому 17_b делит 97_b тогда и только тогда, когда $b + 7$ делит 56. Из условия $b > 9$ следует $b + 7 > 16$. Делители числа 56, большие 16, — это 28 и 56. Отсюда $b = 21$ или $b = 49$, а их сумма равна 70. $\square$

Задача 1.2. Запись xy_b означает двузначное число с цифрами x и y в системе счисления с основанием b . Найдите сумму всех целых оснований $b > 9$, для которых число 18_b является делителем числа 98_b .

Ответ: 80

Задача 1.3. Запись xy_b означает двузначное число с цифрами x и y в системе счисления с основанием b . Найдите сумму всех целых оснований $b > 9$, для которых число 15_b является делителем числа 95_b .

Ответ: 50

Задача 1.4. Запись xy_b означает двузначное число с цифрами x и y в системе счисления с основанием b . Найдите сумму всех целых оснований $b > 9$, для которых число 19_b является делителем числа 99_b .

Ответ: 105

Задача 2.1. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел (m, n) , для которых

$$m^2 n = 12^{12}?$$

Ответ: 91

Решение. Сначала выберем m , после чего n определяется однозначно. Значит, надо посчитать количество делителей правой части, являющихся точными квадратами. Разложим правую часть на множители:

$$12^{12} = 2^{24} 3^{12}.$$

Показатель двойки в m^2 можно выбрать 13 способами: $0, 2, \dots, 24$; показатель тройки — 7 способами: $0, 2, \dots, 12$. Итого $13 \cdot 7 = 91$. $\square$

Задача 2.2. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел (m, n) , для которых

$$m^2 n = 18^{10}?$$

Ответ: 66

Задача 2.3. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел (m, n) , для которых

$$m^2 n = 20^{14}?$$

Ответ: 120

Задача 2.4. Сколько существует упорядоченных пар натуральных чисел (m, n) , для которых

$$m^2 n = 45^8?$$

Ответ: 45

Задача 3.1. Точка P лежит на описанной окружности квадрата $ABCD$ и не совпадает с его вершинами. Известно, что

$$PA \cdot PC = 24, \quad PB \cdot PD = 32.$$

Найдите площадь квадрата.

Ответ: 40

Решение. Обозначим диагональ квадрата через d , а данные произведения — через u и v . Углы APC и BPD прямые, поэтому площади треугольников APC и BPD равны $u/2$ и $v/2$. Следовательно, расстояния от P до взаимно перпендикулярных диагоналей квадрата равны u/d и v/d . Точка P лежит на окружности радиуса $d/2$, поэтому

$$\frac{u^2}{d^2} + \frac{v^2}{d^2} = \frac{d^2}{4}.$$

Отсюда площадь квадрата равна

$$\frac{d^2}{2} = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Для первого варианта $\sqrt{24^2 + 32^2} = 40$. □

Задача 3.2. Точка P лежит на описанной окружности квадрата $ABCD$ и не совпадает с его вершинами. Известно, что

$$PA \cdot PC = 30, \quad PB \cdot PD = 40.$$

Найдите площадь квадрата.

Ответ: 50

Задача 3.3. Точка P лежит на описанной окружности квадрата $ABCD$ и не совпадает с его вершинами. Известно, что

$$PA \cdot PC = 48, \quad PB \cdot PD = 64.$$

Найдите площадь квадрата.

Ответ: 80

Задача 3.4. Точка P лежит на описанной окружности квадрата $ABCD$ и не совпадает с его вершинами. Известно, что

$$PA \cdot PC = 65, \quad PB \cdot PD = 72.$$

Найдите площадь квадрата.

Ответ: 97

Задача 4.1. В каждую клетку таблицы 2×3 вписывают по одной цифре. Читая цифры слева направо, в строках получают два числа, а в столбцах сверху вниз — три числа. Начальные нули разрешены: например, запись 008 означает число 8.

Сколько существует заполнений, в которых сумма двух чисел, полученных из строк, равна 999, а сумма трёх чисел, полученных из столбцов, равна 99?

Ответ: 45

Решение. Обозначим цифры таблицы так:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

Из равенства суммы строчных чисел числу 999 получаем

$$a + d = b + e = c + f = 9.$$

Переносов быть не может, так как сумма двух цифр не превосходит 18. Пусть $T = a + b + c$. Тогда $d + e + f = 27 - T$, а сумма чисел в столбцах равна

$$10T + (27 - T) = 9T + 27.$$

Из $9T + 27 = 99$ находим $T = 8$. Каждая тройка неотрицательных целых чисел a, b, c с суммой 8 однозначно определяет остальные цифры. Таких троек

$$C_{8+2}^2 = 45.$$

□

Задача 4.2. В каждую клетку таблицы 2×3 вписывают по одной цифре. Читая цифры слева направо, в строках получают два числа, а в столбцах сверху вниз — три числа; начальные нули разрешены. Сколько существует заполнений, в которых сумма двух чисел из строк равна 999, а сумма трёх чисел из столбцов равна 90?

Ответ: 36

Задача 4.3. В каждую клетку таблицы 2×3 вписывают по одной цифре. Читая цифры слева направо, в строках получают два числа, а в столбцах сверху вниз — три числа; начальные нули разрешены. Сколько существует заполнений, в которых сумма двух чисел из строк равна 999, а сумма трёх чисел из столбцов равна 108?

Ответ: 55

Задача 4.4. В каждую клетку таблицы 2×3 вписывают по одной цифре. Читая цифры слева направо, в строках получают два числа, а в столбцах сверху вниз — три числа; начальные нули разрешены. Сколько существует заполнений, в которых сумма двух чисел из строк равна 999, а сумма трёх чисел из столбцов равна 117?

Ответ: 63

Задача 5.1. В компании четыре человека, один из них — Антон. Изначально мяч у Антона. Каждый раз владелец мяча передаёт его любому другому человеку. Сколькими способами можно сделать ровно 7 передач так, чтобы после последней передачи мяч снова оказался у Антона?

Ответ: 546

Решение. Пусть всего людей p , а a_k — число последовательностей из k передач, после которых мяч у Антона. Всего последовательностей длины k равно $(p-1)^k$. Чтобы на следующем ходу передать мяч Антону, перед этим он должен находиться у кого-то другого, поэтому

$$a_{k+1} = (p-1)^k - a_k, \quad a_0 = 1.$$

Докажем по индукции, что

$$a_k = \frac{(p-1)^k + (p-1)(-1)^k}{p}.$$

При $k=0$ правая часть равна

$$\frac{1 + (p-1)}{p} = 1 = a_0.$$

Если формула верна для k , то из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (p-1)^k - \frac{(p-1)^k + (p-1)(-1)^k}{p} \\ &= \frac{p(p-1)^k - (p-1)^k - (p-1)(-1)^k}{p} \\ &= \frac{(p-1)^{k+1} + (p-1)(-1)^{k+1}}{p}. \end{aligned}$$

Значит, формула верна для всех $k \geq 0$.

При $p=4$ и $k=7$ получаем $(3^7 - 3)/4 = 546$.

□

Задача 5.2. В компании пять человек, один из них — Антон. Изначально мяч у Антона. Каждый раз владелец мяча передаёт его любому другому человеку. Сколькими способами можно сделать ровно 6 передач так, чтобы после последней передачи мяч снова оказался у Антона?

Ответ: 820

Задача 5.3. В компании четыре человека, один из них — Антон. Изначально мяч у Антона. Каждый раз владелец мяча передаёт его любому другому человеку. Сколькими способами можно сделать ровно 8 передач так, чтобы после последней передачи мяч снова оказался у Антона?

Ответ: 1641

Задача 5.4. В компании шесть человек, один из них — Антон. Изначально мяч у Антона. Каждый раз владелец мяча передаёт его любому другому человеку. Сколькими способами можно сделать ровно 6 передач так, чтобы после последней передачи мяч снова оказался у Антона?

Ответ: 2605

Задача 6.1. Найдите сумму всех натуральных n , для которых число

$$n^2 - 19n + 99$$

является точным квадратом целого числа.

Ответ: 38

Решение. Рассмотрим общий вид

$$n^2 - An + B = k^2$$

и положим $D = 4B - A^2$. Тогда

$$4n^2 - 4An + 4B = 4k^2$$

$$(2k - 2n + A)(2k + 2n - A) = D.$$

В первом варианте $D = 35$. Пары положительных делителей $u < v$ числа 35 — это $(1, 35)$ и $(5, 7)$. Каждая пара даёт два значения

$$n = \frac{2A \pm (v - u)}{4}.$$

Получаем $n = 1, 18, 9, 10$; их сумма равна 38. □

Задача 6.2. Найдите сумму всех натуральных n , для которых число

$$n^2 - 29n + 224$$

является точным квадратом целого числа.

Ответ: 58

Задача 6.3. Найдите сумму всех натуральных n , для которых число

$$n^2 - 35n + 322$$

является точным квадратом целого числа.

Ответ: 105

Задача 6.4. Найдите сумму всех натуральных n , для которых число

$$n^2 - 39n + 399$$

является точным квадратом целого числа.

Ответ: 117

Задача 7.1. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 3. Площадь трапеции равна 72, а длины её оснований a и b различны. Найдите $a^2 + b^2$.

Ответ: 504

Решение. Пусть радиус окружности равен r , площадь трапеции — S , а

$$p = a + b.$$

Высота равна $2r$, поэтому $S = rp$ и $p = S/r$. По теореме о сумме противоположных сторон описанного четырехугольника каждая боковая сторона равна $p/2$. После проведения высот получаем

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2r)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Значит, $(a-b)^2 = p^2 - 16r^2$, и

$$a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = p^2 - 8r^2.$$

В первом варианте $p = 72/3 = 24$, поэтому ответ равен

$$24^2 - 8 \cdot 3^2 = 504.$$

□

Задача 7.2. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 2. Площадь трапеции равна 40, а длины её оснований a и b различны. Найдите $a^2 + b^2$.

Ответ: 368

Задача 7.3. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 4. Площадь трапеции равна 112, а длины её оснований a и b различны. Найдите $a^2 + b^2$.

Ответ: 656

Задача 7.4. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 5. Площадь трапеции равна 160, а длины её оснований a и b различны. Найдите $a^2 + b^2$.

Ответ: 824

Задача 8.1. Найдите сумму всех положительных целых чисел n , для которых при делении числа

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

на $n + 5$ получается остаток 17.

Ответ: 239

Решение. Пусть

$$S = 1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

По условию $S \equiv 17 \pmod{n+5}$, $n+5 > 17$. Умножаем на 4:

$$n^2(n+1)^2 \equiv 68 \pmod{n+5}.$$

Так как $n \equiv -5 \pmod{n+5}$, то $n+1 \equiv -4$, значит

$$n^2(n+1)^2 \equiv (-5)^2(-4)^2 = 400 \pmod{n+5}.$$

Следовательно,

$$400 \equiv 68 \pmod{n+5} \implies 332 \equiv 0 \pmod{n+5},$$

то есть $n+5 \mid 332 = 2^2 \cdot 83$. При $n+5 > 17$ получаем $n+5 \in \{83, 166, 332\}$, откуда

$$n \in \{78, 161, 327\}.$$

Из этих вариантов подходят только $n \in \{78, 161\}$, поэтому искомая сумма:

$$78 + 161 = 239.$$

□

Задача 8.2. Найдите сумму всех положительных целых чисел n , для которых при делении числа

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

на $n + 4$ получается остаток 17.

Ответ: 49

Задача 8.3. Найдите сумму всех положительных целых чисел n , для которых при делении числа

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

на $n + 6$ получается остаток 17.

Ответ: 346

Задача 8.4. Найдите сумму всех положительных целых чисел n , для которых при делении числа

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

на $n + 7$ получается остаток 17.

Ответ: 668

Задача 9.1. Доску 7×1 целиком покрывают без наложений плитками вида $m \times 1$ (разным плиткам могут соответствовать разные m) и окрашена в красный, синий или зелёный цвет. Два покрытия считаются различными, если различаются границы плиток или их цвета. Найдите число покрытий, в каждом из которых использованы все три цвета.

Ответ: 8106

Решение. Для доски длины n , если разрешено k цветов, первую клетку можно покрыть плиткой одного из k цветов. Первую клетку можно окрасить в любой из k цветов. Затем для каждой следующей клетки есть $k + 1$ вариант: продолжить предыдущую плитку (цвет остаётся прежним) или начать новую плитку и выбрать для неё один из k цветов. Итого, таких покрытий

$$k(k + 1)^{n-1}.$$

По формуле включений и исключений число покрытий доски длины n , в которых есть все три цвета, равно

$$N = 3 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}.$$

При $n = 7$ получаем $N = 8106$. □

Задача 9.2. Доску 6×1 целиком покрывают без наложений плитками вида $m \times 1$ (разным плиткам могут соответствовать разные m) и окрашена в красный, синий или зелёный цвет. Два покрытия считаются различными, если различаются границы плиток или их цвета. Найдите число покрытий, в каждом из которых использованы все три цвета.

Ответ: 1710

Задача 9.3. Доску 5×1 целиком покрывают без наложений плитками вида $m \times 1$ (разным плиткам могут соответствовать разные m) и окрашена в красный, синий или зелёный цвет. Два покрытия считаются различными, если различаются границы плиток или их цвета. Найдите число покрытий, в каждом из которых использованы все три цвета.

Ответ: 330

Задача 10.1. На прямой ℓ в указанном порядке расположены точки A, B, C, D, E . Точка T не лежит на прямой ℓ , причём

$$\angle BTC = \angle DTE,$$

а прямая AT касается в точке T окружности, описанной около треугольника BTE . Известно, что $AB = 2$, $BC = 36$, $CD = 15$. Найдите DE .

Ответ: 954

Решение. По теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle ATB = \angle TEA.$$

Добавляя к этому равенство $\angle BTC = \angle DTE$ и учитывая порядок точек на прямой ℓ , получаем

$$\angle ATC = \angle ATB + \angle BTC = \angle TEA + \angle DTE = \angle TDA.$$

Кроме того, $\angle CAT = \angle TAD$, поскольку точки A, C, D лежат на одной прямой. Следовательно,

$$\triangle ACT \sim \triangle ATD,$$

откуда

$$AT^2 = AC \cdot AD.$$

Теперь применим теорему о степени точки A относительно окружности, описанной около треугольника BTE . Прямая AT касается этой окружности, а секущая AE пересекает её в точках B и E , поэтому

$$AT^2 = AB \cdot AE.$$

Таким образом,

$$AB \cdot AE = AC \cdot AD.$$

В первом клоне $AC = 2 + 36 = 38$, $AD = 38 + 15 = 53$, поэтому

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{38 \cdot 53}{2} = 1007.$$

Наконец,

$$DE = AE - AD = 1007 - 53 = 954.$$

□

Задача 10.2. На прямой ℓ в указанном порядке расположены точки A, B, C, D, E . Точка T не лежит на прямой ℓ , причём $\angle BTC = \angle DTE$, а прямая AT касается в точке T окружности, описанной около треугольника BTE . Известно, что $AB = 3$, $BC = 20$, $CD = 7$. Найдите DE .

Ответ: 200

Задача 10.3. На прямой ℓ в указанном порядке расположены точки A, B, C, D, E . Точка T не лежит на прямой ℓ , причём $\angle BTC = \angle DTE$, а прямая AT касается в точке T окружности, описанной около треугольника BTE . Известно, что $AB = 4, BC = 21, CD = 11$. Найдите DE .

Ответ: 189

Задача 10.4. На прямой ℓ в указанном порядке расположены точки A, B, C, D, E . Точка T не лежит на прямой ℓ , причём $\angle BTC = \angle DTE$, а прямая AT касается в точке T окружности, описанной около треугольника BTE . Известно, что $AB = 5, BC = 18, CD = 12$. Найдите DE .

Ответ: 126

Задача 11.1. Сколько существует функций

$$f\colon \{1,2,\ldots,8\}\rightarrow \{1,2,\ldots,8\},$$

для которых

$$f(f(x))=x$$

при каждом $x\in \{1,2,\ldots,8\}$?

Ответ: 764

Решение. Из равенства $f(f(x))=x$ следует, что каждый элемент либо переходит сам в себя, либо входит в пару различных элементов, которые функция меняет местами.

Обозначим через a_n число таких функций на множестве из n элементов. Рассмотрим элемент n . Если $f(n)=n$, то на остальных $n-1$ элементах функцию можно задать a_{n-1} способами. Если же $f(n)=k\neq n$, то обязательно $f(k)=n$. Элемент k можно выбрать $n-1$ способом, после чего на оставшихся $n-2$ элементах функцию можно задать a_{n-2} способами. Поэтому

$$a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}.$$

Начальные значения равны $a_0=1$ и $a_1=1$. Последовательно получаем

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	1	1	2	4	10	26	76	232	764	2620	9496	35696

Следовательно, при $n=8$ ответ равен 764. □

Задача 11.2. Сколько существует функций

$$f\colon \{1,2,\ldots,9\}\rightarrow \{1,2,\ldots,9\},$$

для которых

$$f(f(x))=x$$

при каждом $x\in \{1,2,\ldots,9\}$?

Ответ: 2620

Задача 11.3. Сколько существует функций

$$f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\},$$

для которых

$$f(f(x)) = x$$

при каждом $x \in \{1, 2, \dots, 10\}$?

Ответ: 9496

Задача 11.4. Сколько существует функций

$$f: \{1, 2, \dots, 7\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\},$$

для которых

$$f(f(x)) = x$$

при каждом $x \in \{1, 2, \dots, 7\}$?

Ответ: 232

Задача 12.1. Найдите число упорядоченных пар (m, n) , где $1 \leq m, n \leq 30$, для которых

$$\text{НОД}(2^m + 1, 2^n - 1) > 1.$$

Ответ: 295

Решение. Используем тождество

$$\text{НОД}(2^r - 1, 2^s - 1) = 2^{\text{НОД}(r, s)} - 1.$$

Так как $2^m - 1$ и $2^m + 1$ взаимно просты, то

$$\text{НОД}(2^m + 1, 2^n - 1) = \frac{2^{\text{НОД}(2m, n)} - 1}{2^{\text{НОД}(m, n)} - 1}.$$

Эта дробь больше 1 тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(2m, n) > \text{НОД}(m, n)$, то есть когда показатель степени двойки в числе n больше, чем в числе m .

Среди чисел от 1 до 30 количества чисел, в которых двойка входит в точных степенях 0, 1, 2, 3, 4, равны

$$15, 8, 4, 2, 1.$$

Пары с разными показателями степени двойки попарно разбиваются на два симметричных случая. Поэтому искомое число пар равно

$$\frac{30^2 - (15^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2)}{2} = 295.$$

□

Задача 12.2. Найдите число упорядоченных пар (m, n) , где $1 \leq m, n \leq 24$, для которых

$$\text{НОД}(2^m + 1, 2^n - 1) > 1.$$

Ответ: 191

Задача 12.3. Найдите число упорядоченных пар (m, n) , где $1 \leq m, n \leq 36$, для которых

$$\text{НОД}(2^m + 1, 2^n - 1) > 1.$$

Ответ: 430

Задача 12.4. Найдите число упорядоченных пар (m, n) , где $1 \leq m, n \leq 40$, для которых

$$\text{НОД}(2^m + 1, 2^n - 1) > 1.$$

Ответ: 532

Задача 13.1. Какое наибольшее число пар без общих элементов можно выбрать из множества

$$\{1, 2, \dots, 101\}$$

так, чтобы суммы чисел во всех выбранных парах были различны и не превосходили 101?

Ответ: 40

Решение. Обозначим $n = 101$. Пусть выбрано k пар, а S — сумма всех использованных чисел. С одной стороны, числа различны, поэтому

$$S \geq 1 + 2 + \dots + 2k = k(2k + 1).$$

С другой стороны, k сумм различны и не превосходят n , значит

$$S \leq n + (n - 1) + \dots + (n - k + 1) = \frac{k(2n - k + 1)}{2}.$$

Отсюда $5k \leq 2n - 1$, то есть

$$k \leq \left\lfloor \frac{2n - 1}{5} \right\rfloor.$$

Оценка достигается. Если $n = 5m + 1$ или $5m + 2$, возьмем две серии пар

$$(4m + 1, m), (4m, m - 1), \dots, (3m + 2, 1)$$

и

$$(3m, 2m), (3m - 1, 2m - 1), \dots, (2m + 1, m + 1).$$

Если $n = 5m + 3$, $5m + 4$ или $5m + 5$, аналогично возьмем

$$(4m + 2, m + 1), \dots, (3m + 2, 1)$$

и

$$(3m + 1, 2m + 1), \dots, (2m + 2, m + 2).$$

Во всех случаях числа в парах различны, а их суммы различны и не превосходят n .
При $n = 101$ получаем

$$k = \left\lfloor \frac{201}{5} \right\rfloor = 40.$$

□

Задача 13.2. Какое наибольшее число пар без общих элементов можно выбрать из множества

$$\{1, 2, \dots, 128\}$$

так, чтобы суммы чисел во всех выбранных парах были различны и не превосходили 128?

Ответ: 51

Задача 13.3. Какое наибольшее число пар без общих элементов можно выбрать из множества

$$\{1, 2, \dots, 202\}$$

так, чтобы суммы чисел во всех выбранных парах были различны и не превосходили 202?

Ответ: 80

Задача 13.4. Какое наибольшее число пар без общих элементов можно выбрать из множества

$$\{1, 2, \dots, 257\}$$

так, чтобы суммы чисел во всех выбранных парах были различны и не превосходили 257?

Ответ: 102

Задача 14.1. Прямая ℓ проходит через вершину B и внутреннюю область правильного шестиугольника $ABCDEF$. Расстояния от вершин A и C до прямой ℓ равны соответственно 7 и 4. Площадь шестиугольника равна $K\sqrt{3}$, где K — целое число. Найдите K .

Ответ: 74

Решение. Повернём прямую ℓ вокруг центра шестиугольника последовательно на 60° , 120° , 180° , 240° и 300° . Полученные шесть прямых обозначим через $\ell_A, \ell_B, \dots, \ell_F$ так, чтобы прямая ℓ_X проходила через вершину X . При этом $\ell_B = \ell$.

Пусть A' — точка пересечения ℓ_A и ℓ_B , точка B' — точка пересечения ℓ_B и ℓ_C ; точки C', D', E', F' определим аналогично. Из симметрии следует, что треугольники

$$AA'B, BB'C, CC'D, DD'E, EE'F, FF'A$$

равны, а $A'B'C'D'E'F'$ — правильный шестиугольник. Угол $AA'B$ равен 60° . Таким образом, исходный шестиугольник разбит на шесть равных треугольников и меньший правильный шестиугольник.

Опустим из A и C перпендикуляры AP и CQ на ℓ_B . По условию $AP = 7$ и $CQ = 4$. Треугольники APA' и CQB' имеют углы 30° , 60° и 90° , поэтому

$$AA' = \frac{2}{\sqrt{3}} AP = \frac{14}{\sqrt{3}}, \quad CB' = \frac{2}{\sqrt{3}} CQ = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Из равенства треугольников $AA'B$ и $BB'C$ получаем

$$BA' = CB' = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Кроме того, из равенства треугольников $BB'C$ и $FF'A$ следует, что $AF' = CB'$. Значит, сторона меньшего шестиугольника равна

$$F'A' = AA' - AF' = \frac{14}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Площадь одного из шести равных треугольников равна

$$[AA'B] = \frac{AA' \cdot BA' \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{28}{\sqrt{3}}.$$

Площадь меньшего правильного шестиугольника равна

$$6 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}.$$

Следовательно, площадь исходного шестиугольника равна

$$6 \cdot \frac{28}{\sqrt{3}} + 18\sqrt{3} = 56\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 74\sqrt{3}.$$

Поэтому $K = 74$. □

Задача 14.2. Прямая ℓ проходит через вершину B и внутреннюю область правильного шестиугольника $ABCDEF$. Расстояния от вершин A и C до прямой ℓ равны соответственно 8 и 5. Площадь шестиугольника равна $K\sqrt{3}$, где K — целое число. Найдите K .

Ответ: 98

Задача 14.3. Прямая ℓ проходит через вершину B и внутреннюю область правильного шестиугольника $ABCDEF$. Расстояния от вершин A и C до прямой ℓ равны соответственно 9 и 5. Площадь шестиугольника равна $K\sqrt{3}$, где K — целое число. Найдите K .

Ответ: 122

Задача 14.4. Прямая ℓ проходит через вершину B и внутреннюю область правильного шестиугольника $ABCDEF$. Расстояния от вершин A и C до прямой ℓ равны соответственно 9 и 6. Площадь шестиугольника равна $K\sqrt{3}$, где K — целое число. Найдите K .

Ответ: 126