

Отборочная работа на осенние сборы

1. На окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и отличная от них точка C . Касательная к окружности в точке A и прямая BC пересекаются в точке D . Докажите, что прямая, касающаяся окружности в точке C , делит отрезок AD пополам.

Решение: Обозначим через E точку пересечения касательной к окружности в точке C с прямой AD , а через O — центр окружности.

Заметим, что $AE = EC$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки. Также $OB = OC$, поэтому $\angle ECD = 90^\circ - \angle OCB = 90^\circ - \angle OBC$. $\angle CDE = \angle BDA = 90^\circ - \angle OBC = \angle ECD$, откуда $EC = DE$. $\square$

2. Разность квадратов корней квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + 3x + q$ равна 3. Найдите q .

Решение: Пусть x_1, x_2 — корни трёхчлена f . По теореме Виета их сумма равна -3 , откуда

$$3 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = -3(x_1 - x_2),$$

то есть $x_1 - x_2 = -1$. Решаем систему из двух линейных уравнений:

$$2x_1 = (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = -4,$$

следовательно, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ и снова по теореме Виета: $q = x_1 x_2 = 2$. $\square$

Критерии проверки:

Корни не упорядочены, хотя это нужно для решения — **минус 1 балл**.

Задача решена для разности, а не разности квадратов — **1 балл**.

3. Ярик и Коля играют в игру: они по очереди рисуют в одной общей тетради кружочки. Начинает Ярик. Он может нарисовать 1 кружочек, после этого Коля может нарисовать 1 или 2 кружочка; после этого Ярик может нарисовать 1, 2, 3 или 4 кружочка и т.д. На n -м ходу игрок может нарисовать от 1 до 2^{n-1} кружочков. Игрок, после хода которого в тетради будет нарисовано 2026 кружочков, выигрывает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Ответ: У Коли.

Решение: В свои 5 первых ходов Коле нужно рисовать по одному кружочку. Тогда за первые 11 ходов будет нарисовано не более $(1 + 1 + 1 + 1 + 1) + 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1370$ кружочков, значит, игра ещё не закончится. Следующим ходом Коля может дорисовать оставшиеся кружочки (не более 656, что меньше 2048) и победить. $\square$

Критерии проверки:

При правильном решении стратегия Коли явно не предъявлена — **минус 1 балл**.

4. *Можно ли написать 101 натуральное число (необязательно, чтобы все числа были различны), произведение которых равно сумме всех их попарных наименьших общих кратных?*

Можно.

Решение: Например, числа 2, 199, 251 и 98 единиц. □

5. *Клетки доски $2n \times 2m$ раскрашены в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить mn фишек на белые клетки этой доски так, чтобы в одной клетке стояло не более одной фишки и никакие две фишки не стояли в соседних по диагонали клетках?*

Ответ: C_{m+n}^m .

Решение: Разобьём таблицу на квадраты 2×2 , в силу симметрии будем считать левую нижнюю клетку белой. Ясно, что в каждом квадрате должна стоять ровно одна фишка.

Рассмотрим некоторый столбец из квадратов 2×2 . Заметим, что если в некотором квадрате фишка оказалась в правом верхнем углу, то и во всех квадратах выше должно произойти то же самое, иначе фишки будут неминуемо касаться по углу. Аналогичное верно для любой строки из квадратов 2×2 .

Отметим только квадраты, в которых фишка стоит в левом нижнем углу. Заметим, что количества отмеченных квадратов 2×2 в строках не строго убывают снизу-вверх. Аналогично с количествами отмеченных квадратов в столбцах слева-направо. Таким образом, отмеченные квадраты образуют диаграмму Юнга, вписанную в клетчатый прямоугольник $n \times m$.

На занятиях кружка было доказано, что количество таких диаграмм Юнга равно $C_{n+m}^m = C_{n+m}^n$. □

Критерии проверки:

Доска разбита на квадраты 2×2 — **1 балл**.

Установлено, что происходит при постановке знака в угловой квадрат — **плюс 1 балл**.

6. *a, b, c, d — данные числа. Точка D внутри остроугольного треугольника ABC такова, что*

$$AB = ab, \quad AC = ac, \quad AD = ad, \quad BC = bc, \quad BD = bd, \quad CD = cd.$$

Докажите, что $\angle ABD + \angle ACD = 60^\circ$.

Решение: Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки D на стороны BC, CA, AB соответственно. Четырёхугольник AB_1DC_1 — вписанный с диаметром

AD , поэтому $B_1C_1 = AD \sin \angle A$.

Аналогично $C_1A_1 = BD \sin \angle B$, $A_1B_1 = CD \sin \angle C$.

Из теоремы синусов

$$\frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{BC}{AC} = \frac{b}{a},$$

следовательно, $\sin \angle B = \frac{a}{b} \sin \angle A$. Аналогично $\sin \angle C = \frac{a}{c} \sin \angle A$.

Тогда $B_1C_1 : A_1C_1 : B_1A_1 = (AD \sin \angle A) : (BD \sin \angle B) : (CD \sin \angle C)$. Получается, $B_1C_1 = A_1C_1 = B_1A_1$ и треугольник $A_1B_1C_1$ правильный. Таким образом,

$$\angle ABD + \angle ACD = \angle C_1A_1D + \angle DA_1B_1 = 60^\circ.$$

□

Критерии проверки:

Сделана поворотная гомотетия с центром в вершине четырёхугольника - **1 балл**.