Теорема о трех колпаках

1. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся отрезка AB) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB.

2. На прямой, проходящей через две общие точки пересекающихся окружностей ω_1 и ω_2, выбрана точка X. Из точки X к каждой из окружности проведена касательная, не пересекающая другую окружность. Докажите, что прямая соединяющая точки касания и общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в одной точке.

3. Каждая из окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 касается внешним образом окружности ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно и двух сторон треугольника ABC. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

4. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности треугольника CDA, касающейся стороны AC, лежат на одной прямой.

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Вписанные окружности треугольников ABD и CBD с центрами в точках I_a и I_c соответственно касаются стороны AC в точках E и F. Пусть I_aI_c пересекает BD в точке P, AI_a пересекает CP в точке X, а CI_c пересекает AP в точке Y. Докажите, что прямые EX и FY пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC.

6. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC, а ω – вневписанная окружность треугольника ABC, касающаяся отрезка AB. Общие внутренние касательные к окружностям CA_1B_1 и ω пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что $AP = BQ$.