Гомотетия

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Секущая пересекает окружности в точках M, N, P и Q в таком порядке. Докажите, что $\angle MAP = \angle NAQ$.

2. В треугольнике ABC середины сторон AB, BC, вершина B и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Докажите, что она касается окружности, проходящей через вершины A, C и ортоцентр треугольника ABC.

3. На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен параллелограмм $ACDE$, диагонали которого пересекаются в точке O. Пусть M и N – середины сторон AB и BC. Докажите, что прямые MD, EN и BO пересекаются в одной точке.

4. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины CB и AB.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке

6. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC, касаются некоторой фиксированной окружности.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть M – точка пересечения его медиан, а AH – высота этого треугольника. Луч MH пересекает описанную окружность в точке A_0. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0HB, касается AB.

8. Четырёхугольник вписанный $ABCD$. Биссектриса угла ABD пересекает сторону AD и описанную окружность в точках K и M соответственно. Биссектриса угла CBD пересекает сторону CD и описанную окружность в точках L и N соответственно. Оказалось, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.