Точка Болтая

Точкой Болтая треугольника ABC со стороны вершины A (или A-Болтаем) назовём такую точку Б (Б$_a$), что

$$\angle BA\text{Б} = \angle AC\text{Б} \quad \text{и} \quad \angle CA\text{Б} = \angle AB\text{Б}.$$

Обозначения для задач 0-3: пусть в остроугольном треугольнике ABC, вписанном в окружность Ω с центром O

- M_B и M_C — середны AC и AB соответственно;
- Ш — точка A-Шалтая;
- AA_1 — высота;
- D — пересечение BC и касательной к Ω через точку A.

0. Докажите, что

(а) Б — центр поворотной гомотетии, переводящей BA в AC.

(б) Б изогонально сопряжена Ш.

(в) Б лежит на симедиане из A.

(г) Б, B, O и C лежат на одной окружности.

(д) Б, M_B, M_C и A лежат на одной окружности.

(е) Б — проекция O на симедиану.

(ж) Б, M_C, B и A_1 лежат на одной окружности.

1. Докажите, что A_1Б проходит через середину M_BM_C.

2. На сторонах AB и AC вовне построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$. Прямая AG пересекает отрезок BD в точке X, прямая AE пересекает отрезок CF в точке Y. Докажите, что окружности (DGX) и (FEY) пересекаются в Б.

3. Докажите, что O и три точки Болтая треугольника ABC лежат на одной окружности.

4. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC произвольно выбираются точки X и Y так, что $AX \cdot AY = BX \cdot CY$. Докажите, что центры всех возможных окружностей (AXY) лежат на одной прямой.

5. Точки D, E и F на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно таковы, что

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}.$$

Пусть M — точка пересечения окружностей (BFD) и (CDE), отличная от D. O — центр описанной окружности, L — точка пересечения симедиан. Докажите, что $\angle LMO = 90^\circ$.

6. На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки P и Q, что $\angle PAB = \angle ACB$ и $\angle QAC = \angle ABC$. Точки M и N таковы, что точки P и Q являются серединами отрезков AM и AN соответственно. Отрезки BM и CN пересекаются в точке X. Докажите, что X лежит на (ABC).

7. В параллелограмме $ABCD$ с тупым углом A опустили перпендикуляры AX и AY из A на BC и CD соответственно. Из середин M и N отрезков AX и AY соответственно провели перпендикуляры ℓ_1 и ℓ_2 к XY. Пусть

$$\ell_1 \cap AB = L,\ \ell_1 \cap BC = K,\ \ell_2 \cap CD = Q,\ \ell_2 \cap DA = P.$$

Докажите, что окружности (LBK) и (PQD) касаются.