Точка Шалтая

Точкой Шалтая треугольника ABC со стороны вершины A (или A-Шалтаем) назовём такую точку Ш ($Ш_a$), что

$$\angle BAШ = \angle CBШ \quad \text{и} \quad \angle CAШ = \angle BCШ.$$

Обозначения для задач 0-4: пусть в остроугольном треугольнике ABC

- H — точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1;
- M — середина стороны BC;
- D — точка пересечения прямых BC и B_1C_1;
- H' — точка, симметричная H относительно BC;
- L — пересечение симедианы из вершины A с (ABC).

0. Докажите, что

(а) Ш лежит на AM;

(б) Ш лежит на (BHC);

(в) Ш — проекция H на AM;

(г) Ш — центр поворотной гомотетии, переводящей BB_1 в CC_1;

(д) Ш и L симметричны относительно BC;

(е) $ШB/ШC = AB/AC$;

(ж) $BC_1ШM$ и $B_1CШM$ — вписанные;

(з) D лежит на прямой $HШ$.

1. Докажите, что окружность (ADH) проходит через середину отрезка B_1C_1.

2. Докажите, что точка H-Шалтая треугольника BCH, A_1 и L лежат на одной прямой.

3. Докажите, что B_1, C_1, L и H' лежат на одной окружности.

4. Докажите, что A, M, H' и точка пересечения прямых BC и B_1C_1 лежат на одной окружности.

5. На одной из медиан треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Докажите, что на другой медиане найдется такая точка Q, что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбираются такие переменные точки D и E соответственно, что CD и BE пересекаются на окружности (ADE). Докажите, что центры всех таких окружностей (ADE) лежат на фиксированной прямой, не зависящей от выбора D и E.

7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Рассмотрим четыре точки Шалтая: треугольника DAB со стороны вершины A, треугольника ABC со стороны вершины B, треугольника BCD со стороны вершины C, треугольника CDA со стороны вершины D. Докажите, что они лежат на одной окружности.

8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Его диагонали пересекаются в точке Q, а лучи CB и DA — в точке P; M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что (MQN) касается PQ.