

Синусный разнойбой

1. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что сумма любых двух его соседних углов больше 180° . Пары продолжений его несоседних сторон пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 (A_1 — пересечение BC и DE и т.д.). Получилась «звёздочка». Докажите, что $AD_1 \cdot BE_1 \cdot CA_1 \cdot DB_1 \cdot EC_1 = AC_1 \cdot BD_1 \cdot CE_1 \cdot DA_1 \cdot EB_1$.
2. **Базовая лемма.** Докажите, что луч OB внутри угла AOC однозначно восстанавливается по значению величины $\sin \angle AOB / \sin \angle BOC$.
Придумайте короткое решение, подходящее в том числе и для тупого угла.
3. В треугольнике с тупым углом A проведены высоты BB_1, CC_1 . Докажите, что отрезок, соединяющий проекции точки B_1 на прямые BA и BC , равен отрезку, соединяющему проекции точки C_1 на прямые CA и CB .
4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, M, N — середины дуг AB и CD , I, J — центры вписанных окружностей ABD, CBD . Докажите, что MN делит IJ пополам.
5. (а) Для углов α, β, γ треугольника ABC докажите неравенство

$$\sin A + \sin B > \sin C$$

- (б) Для углов α, β, γ треугольника ABC выполнено неравенство

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma} \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Докажите, что один из углов треугольника не меньше 120° .

-
6. AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.
 7. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, M — середина BC . Докажите, что прямые B_1C_1, AM и IA_1 пересекаются в одной точке.