Теоремы Чевы и Менелая + синусы

На прямых, содержащих стороны треугольника ABC, выбраны точки A_1, B_1, C_1.

• *Синусная теорема Чевы.* Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(AB, AA_1)}{\sin(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CC_1)}{\sin(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin(BC, BB_1)}{\sin(BB_1, BA)} = 1.$$

• *Синусная теорема Менелая.* Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

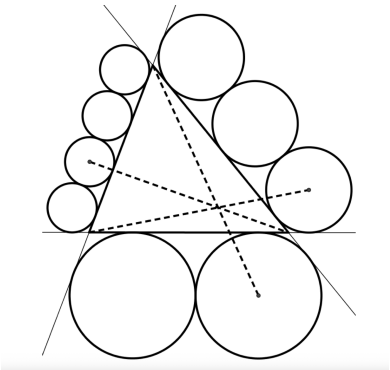
$$\frac{\sin(AB, AA_1)}{\sin(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin(CA, CC_1)}{\sin(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin(BC, BB_1)}{\sin(BB_1, BA)} = -1.$$

1. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

2. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

3. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q — точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

4. Докажите, что три пунктирные прямые пересекаются в одной точке.



5. X — такая точка внутри треугольника ABC, что

$$XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB;$$

I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников XBC, XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.

6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X, биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.