Разнобой по теории чисел

1. Пусть для некоторых натуральных a, b, c число $3^a+3^b+3^c$ является точным квадратом. Докажите, что $a = b = c$.

2. К натуральному числу $a > 1$ приписали это же число и получили число b, кратное a^2. Найдите все возможные значения числа $\dfrac{b}{a^2}$.

3. Докажите, что для любого натурального n существуют такие натуральные a, b, что $4a^2 + 9b^2 - 1$ делится на n.

4. Натуральные числа a и b таковы, что $a + b^3$ делится на $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$. Докажите, что $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ делится на куб некоторого целого числа, большего 1.

5. Найдите все целые решения уравнения $2x^6 + y^7 = 11$.

6. Простое число $p > 2$ и натуральные числа m и n таковы, что p^2 — среднее арифметическое чисел m^2 и n^2. Докажите, что $2p - m - n$ — либо квадрат, либо удвоенный квадрат.