

Про бесконечность

Важная мысль. «Сколь угодно много» $\neq$ «бесконечно много». Например, существует сколь угодно много подряд идущих составных чисел, но бесконечно много — не существует.

Определение. Множество с бесконечным числом элементов называется *счётным*, если его элементы можно занумеровать натуральными числами.

1. По данным последней переписи населения, в РФ живет счетное число жителей. Кроме того, у каждого есть
 - (а) рубль;
 - (б) ненулевое количество денег (не меньше копейки, конечно);
 - (в) ненулевое количество денег (возможно, меньше копейки).Правда ли, что они могут перераспределить деньги так, что все станут миллионерами? Под «перераспределить деньги» имеется в виду, что каждый житель РФ отдаёт конечному количеству других жителей РФ денег общей суммой не более, чем у него есть, так, что каждый житель РФ получает деньги от конечного числа других жителей РФ.
2. Кузнечик стартует в точке 0 на числовой прямой. Он умеет прыгать на любую натуральную длину, не превосходящую 2026, в обе стороны.
 - (а) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках от -12344512 до 12344512 ?
 - (б) Может ли он побывать ровно по одному разу во всех целых точках числовой прямой?
3. У Беса Конечностей конечное число рук, на каждой из которых конечное число пальцев. Каждый день Бес от скуки отрывает себе одну из рук и отращивает сколько хочет новых (конечное число), но на каждой из них обязательно должно быть меньше пальцев, чем на оторванной. Докажите, что рано или поздно у Беса Конечностей закончатся руки.
4. Каждое натуральное число покрасили в красный или синий цвет. Верно ли, что обязательно найдётся бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая только из красных или только из синих чисел?
5. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный простой путь.

На другой стороне ещё задачи.

6. У Беса Конечностей закончились руки, но зато есть счётное число ног, пронумерованное натуральными числами.
- (а) На всех ногах Беса разное (но конечное) число пальцев. Докажите, что Бес может оторвать себе несколько ног так, что на оставшихся ногах число пальцев будет возрастать.
- (б) Все ноги имеют разные длины (само собой, не обязательно целые). Докажите, что Бес Конечностей может оторвать себе несколько ног так, что длина оставшихся будет или строго возрастать, или строго убывать.
7. В стране роботов любые конечные или бесконечные последовательности из 0 и 1 называются словами. Некоторые конечные слова объявлены *матерными*. Слово называется *цензурным*, если оно не содержит матерных подслов.
- (а) Известно, что существуют сколь угодно длинные конечные цензурные слова. Докажите, что существует бесконечное цензурное слово.
- (б) Известно, что матерных слов конечное число и существует бесконечное цензурное слово. Докажите, что существует бесконечное периодическое цензурное слово.
- (в) Останется ли верным утверждение предыдущего пункта, если снять ограничение на конечность множества матерных слов?