

Композиции квадратного трёхчлена

Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Прежде чем решать задачи, ответьте на вопросы:

Q1. Как решить уравнение $f(f(x)) = 0$?

Q2. Сколько корней может иметь уравнение $f(f(x)) = 0$?

Q3. А $f(f(f(x))) = 0$?

1. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет три различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ — семь различных корней?
2. Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$. Уравнение $f(x) = 0$, имеет ровно один вещественный корень, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ — ровно три вещественных корня. Найдите все эти корни.
3. Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение $f(f(f(f(f(x)))))) = 0$.
4. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлены $f(x)$ и $f(f(f(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $f(0)f(1) = 0$.
5. Приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.
6. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1 . Докажите, что $b \leq -1/4$.
7. Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ с комплексными коэффициентами. Известно, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных корня: $x = 3, 4, a, b$. Найдите сумму всех возможных значений $(a + b)^2$.