

Соответствия

1. Пусть N — очень большое натуральное число. Докажите, что суммарное количество цифр в десятичной записи чисел $1, 2, 3, \dots, N$ равно суммарному количеству нулей в десятичной записи чисел $1, 2, 3, \dots, 10N$.
2. Дана шахматная доска. Ее вертикали пронумерованы числами от 1 до 8, а горизонтали обозначены латинскими буквами от a до h. Рассмотрим все возможные замощения доски доминошками 1×2 . Каких замощений больше — тех, которые содержат доминошку a1-a2, или тех, которые содержат доминошку b2-b3?
3. Петя подсчитал количество всевозможных n -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы A, B, C и D, причём в каждом слове букв A и B поровну. Вася подсчитал количество всевозможных $2n$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы A и B, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

4. Докажите, что при любом натуральном n уравнения

$$x^2 + y^2 = n \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 2n$$

имеют одинаковое число решений в целых числах.

5. Упорный Ярослав выписал все возможные наборы из 100 целых чисел от 2 до 2026. Настойчивая Софья посчитала сумму чисел в каждом наборе. Проходивший мимо Владислав нашел остаток от деления каждой суммы на 3. Каких остатков у него получилось больше: 0, 1 или 2?
6. Докажите комбинаторно, что $n! < 2^{n(n-1)/2}$ для любого натурального n .
7. Даня рисует пейзаж «Река»: картина 8×8 пикселей, каждый пиксель одного из двух цветов: синий или оранжевый. Пейзаж удачный, если на картине есть подобие реки: последовательность граничащих друг с другом по стороне синих клеток, среди которых есть клетка в самом левом и в самом правом столбце. Докажите, что среди всевозможных 2^{64} пейзажей удачных меньше половины.
8. Является ли чётным количество всех 20-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?
9. Дано натуральное число n . Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2 ?