

Догадайся, как посчитать

1. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A , B , C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC ?
2. Сколькими способами из чисел $1, 2, \dots, 2n$ можно выбрать два или больше так, чтобы никакие два выбранных числа в сумме не давали $2n + 1$?
3. Дан клетчатый квадрат 101×101 . Внутри него выбирается квадрат 100×100 . Внутри этого квадрата выбирается квадрат 99×99 , и так далее, пока не будет выбран квадрат 1×1 . Оказалось, что выбранный квадрат 1×1 совпадает с центральной клеткой исходного квадрата 101×101 . Сколько существует таких последовательностей квадратов?
4. В колоде 20 карт. Среди них 10 красных и 10 синих. Карты каждого цвета помечены числами $1, 2, \dots, 10$. Карта, помеченная числом k стоит 2^k очков. Сколько способов выбрать несколько карт суммарной стоимостью 2026 очков?
5. К Ивану на день рождения пришли $3N$ гостей. У Ивана есть $3N$ цилиндров с написанными сверху буквами A , B и V , по N штук каждого типа. Иван хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или больше) так, чтобы длина каждого хоровода делилась на 3, и при взгляде на любой хоровод сверху читалось бы по часовой стрелке $ABBAVB\dots ABV$. Сколько у него способов? (Цилиндры с одинаковыми буквами неразличимы; все гости различны.)
6. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме находящейся в центре T , отмечены. Назовём множество отмеченных точек линейным, если все его точки лежат на одной прямой, параллельной стороне треугольника T . Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств?
7. (а) Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается единица, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придется выписать?
(б) Та же задача, но в каждой последовательности должна встречаться тройка, а не единица.