

Системы остатков

Определение. Полной системой вычетов (ПСВ) по модулю n называется множество чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, в котором все числа дают разные остатки по модулю n .

Основное свойство ПСВ.

Если $(n; m) = 1$, то $\{b, m + b, 2m + b, 3m + b, \dots, (n - 1)m + b\}$ – ПСВ по модулю n .

Определение. Приведенной системой вычетов (ПрСВ) по модулю n называется множество чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}\}$, в котором все числа дают разные остатки по модулю n , взаимно простые с n .

Основное свойство ПрСВ.

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}\}$ – ПрСВ $\bmod n$, $(n; m) = 1$. Тогда $\{ma_1, ma_2, \dots, ma_{\varphi(n)}\}$ – тоже ПрСВ.

0. Дано простое число $p > 100$. Докажите, что существуют различные целые неотрицательные a, b, c, d, e , каждое из которых меньше p такие, что $a + 2b + 3c + 4d + 5e$ делится на p .
1. (а) Пусть $p > 2$ – простое число. Существует ли перестановка $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ натуральных чисел $1, 2, \dots, p-1$ такая, что числа $a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, (p-1)a_{p-1}$ образуют приведенную систему вычетов по модулю p ?
(б) Пусть $p = 4k + 1$ – простое число. Существует ли перестановка $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ чисел $1, 2, 3, \dots, p-1$ такая, что числа $1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, (p-1)^{a_{p-1}}$ дают различные остатки по модулю p ?
2. Пусть n – нечетное натуральное число. Докажите, что наборов из k различных натуральных чисел, меньших n , сумма чисел в котором дает остаток 1 по модулю n столько же, сколько наборов, сумма которых дает остаток 2 по модулю n .
3. Пусть p – простое число. Дано p натуральных чисел, произведение которых не делится на p . Докажите, что можно домножить все эти числа на одно и тоже число так, чтобы произведение новых чисел давало остаток 1 при делении на p .
4. Дано простое число $p > 2$. Для каждого натурального числа $k \leq p - 1$ обозначим a_k – количество натуральных делителей числа $kp + 1$, меньших p и больших k . Чему равно $a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}$?
5. Дано простое число $p > 2$. Докажите, что среди любых $p + 1$ целых чисел можно выбрать p чисел $a_1, a_2, \dots, a_p$ так, чтобы число $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + pa_p$ делилось на p .

6. Пусть p — простое число. Сколькими способами можно выбрать несколько натуральных чисел из набора $\{1, 2, 3, \dots, p-1, p\}$ так, чтобы их сумма делилась на p ?
7. Дано нечётное простое число p . Последовательность целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_p$, каждое из которых меньше p , назовём *хорошей*, если $a_1 + a_2 + \dots + a_p$ не делится на p , а $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$ делится на p . Найдите количество хороших последовательностей.

На другой стороне ещё задачи.