

Разбиения и диаграммы Юнга

Определения. Разбиением числа n будем называть невозрастающую последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, в сумме дающих n . Каждому такому разбиению сопоставим *диаграмму Юнга* — набор клеток, выровненный по нижней границе, в котором длина первого столбца равна a_1 , длина второго столбца равна a_2 , и так далее.

1. На доске написано несколько не обязательно различных натуральных чисел с суммой 4000. Пусть n_i — количество чисел, равных i . Найдите наибольшее возможное значение выражения $n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \dots + 3999n_{4000}$, если известно, что чисел не менее 37 и не более 73.
2. Сколько существует способов выбрать натуральное число и разбить его не более, чем на k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ ?
3. Докажите, что количество разбиений натурального числа N на не более чем m натуральных слагаемых равно числу разбиения числа $N + m$ ровно на m натуральных слагаемых.
4. У Димы есть кексы, разложенные в несколько коробок. Дима записал, сколько пирожных в каждой коробке. Максим взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Максим записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Димой равно количеству различных чисел среди записанных Максимом.
5. Диаграмму Юнга покрасили в шахматном порядке. Оказалось, что белых и чёрных клеток в ней поровну. Докажите, что её можно разрезать на доминошки.
6. Петя написал количество разбиений числа n в сумму не более, чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ , Вася написал количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell - 1$, а Маша написала количество разбиений числа $n - \ell$ в сумму не более чем $k - 1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ . Докажите, что сумма Машиного и Васиного чисел равно числу Пети.
7. Докажите, что количество решений уравнения $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$, в которых первые несколько чисел a_i (может быть, одно) натуральны, а остальные равны нулю, совпадает с количеством решений уравнения $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$, в которых все числа a_i равны 0 или 1.
8. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо

клетки и всех клеток, расположенных либо правее, либо выше ее. Дана диаграмма Юнга из n клеток. Пусть s — количество крюков, состоящих ровно из k клеток. Докажите, что

(а) $ks \leq 2n$;

(б) $ks \leq n$;

(в) $s(k + s) \leq 2n$.

9. Докажите, что число способов разбить n в сумму различных слагаемых равно числу способов разбить n в сумму нечетных слагаемых.