Вспомогательная последовательность

Идея. Часто в алгебраических задачах на последовательности вспомогательная последовательность может лучше описать заданное соотношение, чем последовательность из условия.

0. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для каждого натурального n выполнено $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$. Нашлось такое натуральное k, что $a_{2k} = 3a_k$. Найдите a_{46}.

1. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для каждого натурального $n > 1$ выполнено

$$a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}}.$$

Известно, что $a_1 = 1/100$, $a_{2025} = 1/101$. Найдите a_{100}.

2. Последовательность $\{a_n\}$ положительных чисел такова, что каждый её член начиная со второго равен полусумме среднего арифметического и среднего геометрического двух соседних с ним членов. Найдите a_{2017}, если $a_1 = 4$, $a_{64} = 9$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ определена условиями $x_0 = 3/2$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Найдите x_{2025} с точность до первых 100 знаков после запятой.

4. Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями $x_1 = 19$, $x_2 = 97$, $x_{n+2} = x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}}$. Докажите, что среди членов последовательности найдется нуль, и найдите номер этого члена.

5. Числовая последовательность строится по закону

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Можно ли подобрать два первых члена так, чтобы первые десять членов этой последовательности были натуральными числами?

6. Последовательность a_n, заданная первыми членами $a_0 = p$ и $a_1 = q$, а также рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right)$$

является периодической. Докажите, что $pq = 1$.

7. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$ удовлетворяет неравенствам

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geqslant a_{n+1} - (n-1)$$

при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots, 2024$ и неравенству

$$2\sqrt{a_{2025} - 2024} \geqslant a_1 + 1$$

Найдите все возможные значения a_{2025}.

8. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 \in (1, 2)$ и $a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k}$ при любом натуральном k. Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.