Бесконечные арифметические прогрессии из целых чисел

Определение. *Арифметической прогрессией* называется последовательность $\{a_n\}$ для которой существует такое число d, что для каждого n выполнено $a_{n+1} = a_n + d$.

Идея. Арифметическая прогрессия $a_n = a_0 + nd$ (при $d > 0$), состоящая из целых чисел — это все числа, сравнимые с a_0 при делении d, которые не меньше a_0.

1. Докажите, что если арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит квадрат, то она содержит бесконечно много квадратов.

2. Существует ли бесконечная непостоянная арифметическая прогрессия, все члены которой являются простыми числами?

3. Множество натуральных чисел разбито на n арифметических прогрессий с разностями r_1, r_2, …, r_n. Докажите, что

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} = 1.$$

4. Множество натуральных чисел разбито на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что хотя бы в одной из них первый член делится на разность прогрессии.

5. Докажите, что в любой арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, можно выбрать подпоследовательность такую, что множества простых делителей выбранных членов одно и то же.

6. Рассмотрим арифметическую прогрессию, состоящую из натуральных чисел. Докажите, что в ней можно найти бесконечно много членов, сумма цифр которых одинакова.

7. Арифметическая прогрессия a_1, a_2, …, состоящая из натуральных чисел, такова, что при любом n произведение $a_n \cdot a_{n+31}$ делится на 2005. Можно ли утверждать, что все члены прогрессии делятся на 2005?

8. Пусть p и q — различные простые числа. Дана бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, в которой встречается каждое из чисел p^{23}, p^{24}, q^{23} и q^{24}. Докажите, что в этой прогрессии обязательно встретятся числа p и q.

9. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.